Institutionen för matematik

SF1669 Matematisk och numerisk analys II
Modelltentamen

Skrivtid: 5 timmar
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

1. Betrakta funktionen $f(x,y) = x^2 + y$ och området D som ges av olikheterna
$$x \geq 0, \quad y \geq 0 \qquad \text{och} \qquad x^2 + y^2 \leq 1.$$
   (a) Förklara varför man i förväg kan veta att funktionen f antar ett största och ett minsta värde på området D. **(1 p)**
   (b) Bestäm det största och det minsta värdet som f antar på D. **(3 p)**

2. Använd en linjarisering kring punkten $(x_0\,, y_0) = (1\,, 2)$ för att approximera värdet av funktionen $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ i punkten $(1{,}2\;,\; 2{,}1)$. **(4 p)**

3. Beräkna integralen
$$\iint_T 2xy\,dxdy$$
där T är triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(2,1)$ och $(0,3)$, exempelvis genom att utföra variabelbytet $x = 2u$ och $y = u + 3v$. **(4 p)**

DEL B

4. Vektorfältet $\mathbf{F}(x, y)$ är definierat i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dvs i xy-planet förutom origo, genom
$$\mathbf{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$
   (a) Beräkna $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ_1 är enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ orienterad moturs. **(2 p)**
   (b) Beräkna $\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ_2 är cirkeln $(x-3)^2 + y^2 = 1$ orienterad moturs. **(1 p)**
   (c) Förklara hur vi kan veta att $\mathbf{F}(x, y)$ inte är konservativt. **(1 p)**

5. Ekvationen
$$ax^2 + b\cos(x) = c$$
har då $a = 3$, $b = -2$ och $c = 1$ en rot nära $x = 0{,}9$.
   (a) Skriv ett Matlabprogram som bestämmer roten med minst 6 decimalers noggrannhet. **(2 p)**
   (b) Antag nu att a, b och c har en osäkerhet på $\pm 1\%$, $\pm 2\%$ respektive $\pm 3\%$. Skriv ett Matlabprogram som skattar roten så bra det går utifrån denna osäkerhet. Vilken osäkerheten i roten ger osäkerheten i parametrarna upphov till? **(2 p)**

6. Arean av en buktig yta kan beräknas genom formeln
$$\iint_D \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right| ds dt$$
där $\mathbf{r}(s, t)$ är en parametrisering av ytan över området D i st-planet.
Vi ska se på ytan som ges av den del av enhetsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ som ligger ovanför planet $z = 1/2$.
   (a) Skriv upp den dubbelintegral som behöver beräknas om vi använder sfäriska koordinater, dvs $(x, y, z) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$, för att beräkna ytans area. **(1 p)**
   (b) Skriv upp den dubbelintegral som behöver beräknas om vi använder cylindriska koordinater, dvs $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{1-r^2})$, för att beräkna ytans area. **(1 p)**
   (c) Beräkna ytans area genom att beräkna någon av de två dubbelintegralerna från deluppgift (a) och (b). **(2 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Betrakta ekvationen
$$x^y + y^{2x} = 2$$
i området $x, y > 0$.
   (a) Visa att denna ekvation i en omgivning av punkten $(x, y) = (1, 1)$ definierar y som en funktion av x, alltså $y = f(x)$. **(2 p)**
   (b) Bestäm derivatan $f'(1)$, där f är funktionen från deluppgift (a). **(2 p)**

8. (a) Skriv en funktion i Matlab som beräknar dubbelintegralen $\iint_D f(x, y)\, dxdy$ över det rektangulära området $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ med hjälp av trapetsregeln för dubbelintegraler med M delar i x-led och N delar i y-led. Funktionen ska anropas med kommandot `dubbelIntegral(F,a,b,c,d,M,N)` **(2 p)**
   (b) Om både M och N fördubblas, med ungefär vilken faktor förväntas trunkeringsfelet, beräkningsfelet, respektive tabellfelet ändras? **(1 p)**
   (c) Använd funktionen `dubbelIntegral` från del (a) för att skriva ett Matlab-program som beräknar integralen
$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dxdy$$
där rektangeln D ges av $0 \le x \le 2$ och $1 \le y \le 2$ med minst 6 decimalers noggrannhet. **(1 p)**

9. Låt Ω vara området som ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \le 4a^2$ och $x^2 + y^2 \ge a^2$, och låt
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + yz, -xz + y, z - e^x \sin y).$$
Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ ut från Ω. **(4 p)**