KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Måndagen 19 januari, 2015

Skrivtid: 14.00-19.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

1. För varje tal a har vi ekvationssystemet
$$\begin{cases} x+y+z & = & 1 \\ 2x+ay+3z & = & 1 \\ 3x+(a+1)y+az & = & 2. \end{cases}$$
   (a) Bestäm för vilka värden på parametern a systemet har en lösning; inga lösningar; oändligt många lösningar. **(3 p)**
   (b) Lös ekvationssytemet när $a = 1$. **(1 p)**

2. Betrakta följande vektorer i $\mathbb{R}^3$:
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{och} \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$
   (a) Bestäm en ekvation för planet $\operatorname{Span}(\vec{v}, \vec{w})$. **(1 p)**
   (b) Ligger vektorn $\vec{z}$ i $\operatorname{Span}(\vec{v}, \vec{w})$? **(1 p)**
   (c) Bildar $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{u}$ en bas för $\mathbb{R}^3$? **(1 p)**
   (d) Beräkna rangen av matrisen **(1 p)**
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Anpassa kurvan $y = ax^2 + bx + c$ med minstakvadratmetoden till följande tabell av mätdata

x	-1	0	1	2
y	2	0	2	4

(4 p)

DEL B

4. Planet H ges av ekvationen $3x - 5y + 3z = 0$.
   (a) Bestäm en orthonormal (ON) bas β för H. **(1 p)**
   (b) Utvidga β till en ON-bas för $\mathbb{R}^3$. **(1 p)**
   (c) Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonala projektionen på H. Bestäm en matrisrepresentation för T. **(2 p)**

5. Enligt *Cayley-Hamiltons sats* gäller att varje kvadratisk matris uppfyller sin egen karaktäristiska ekvation. Betrakta matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   (a) Bestäm alla egenvektorer till A med egenvärde 2. **(1 p)**
   (b) Beräkna det karaktäristiska polynomet $P_A(x)$ för matrisen A. **(2 p)**
   (c) Verifiera att Cayley-Hamiltons sats gäller för matrisen genom att beräkna $P_A(A)$. **(1 p)**

6. Linjen L i $\mathbb{R}^3$ går genom origo. En riktningsvektor för linjen bildar vinkeln $60°$ mot den positiva x-axeln och vinkeln $45°$ mot den positiva y-axeln. Linjen L skär planet
$$x + \sqrt{2}y - 3z = 6$$
i punkten P. Bestäm P. **(4 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. I datortomografi behöver man kunna hålla reda på alla linjer i planet genom att ge dem *koordinater*. Ett sätt att göra det är genom att till en linje i planet tillordna paret (r, φ) där $r > 0$ och $0 \leq \varphi < 2\pi$ fås genom att $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ är den punkt på linjen som ligger närmast origo. Vi är bara interesserade av linjer som inte går genom origo.
   (a) Bestäm en ekvation på formen $ax + by + c = 0$ för linjen med koordinater (r, φ). **(2 p)**
   (b) Visa att linjerna (r_1, φ_1) och (r_2, φ_2) är parallella om och endast om **(2 p)**
   $$\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) = \cos(\varphi_2)\sin(\varphi_1).$$

8. Kurvan C i $\mathbb{R}^2$ ges av ekvationen $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 12 = 0$. Låt $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ vara basen med vektorerna
   $$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.$$
   Visa att koordinatvektorerna $\begin{bmatrix}z\\w\end{bmatrix}$ för vektorer på kurvan C, med avseende på basen β, satisfierar ekvationen $z^2 - 4w^2 = 6$. **(4 p)**

9. Låt P_n vara vektorrummet av polynom $p(x)$ av grad högst n. Den linjära avbildningen $T\colon P_n \to P_n$ definieras som
   $$T(p(x)) = \frac{1}{x}(p(x) - p(0)).$$
   (a) Låt $n = 3$. Bestäm matrisrepresentationen till avbildningen T med avseende på basen $\{1, x, x^2, x^3\}$. **(1 p)**
   (b) Låt $n = 10$. Bestäm det minsta heltalet m sådan att $T^m = 0$. **(1 p)**
   (c) Låt $n = 100$. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer av avbildningen T. **(2 p)**