KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2015-01-19

DEL A

1. För varje tal a har vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+y+z & = & 1 \\ 2x+ay+3z & = & 1 \\ 3x+(a+1)y+az & = & 2. \end{cases}$$

(a) Bestäm för vilka värden på parametern a systemet har en lösning; inga lösningar; oändligt många lösningar. **(3 p)**

(b) Lös ekvationssytemet när $a = 1$. **(1 p)**

Lösningsförslag. (a) Systemet har 3 ekvationer och 3 obekanta. Gausselimination ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 & 1 \\ 3 & a+1 & a & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-2 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & a-3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3-r_2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Koefficientmatrisen har här determinant $(a-2)(a-4)$, så om $a \neq 2$ och $a \neq 4$ har systemet exakt en lösning. Om $a = 4$ får vi ett konsistent system med en nollrad, så att det finns oändligt många lösningar. Om $a = 2$ får vi systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

vilket uppenbarligen inte är konsistent; inga lösningar.

(b) När $a = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

lösningen är $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$.

Svar.

2. Betrakta följande vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en ekvation för planet $\mathrm{Span}(\vec{v}, \vec{w})$. **(1 p)**

(b) Ligger vektorn $\vec{z}$ i $\mathrm{Span}(\vec{v}, \vec{w})$? **(1 p)**

(c) Bildar $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{u}$ en bas för $\mathbb{R}^3$? **(1 p)**

(d) Beräkna rangen av matrisen **(1 p)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Lösningsförslag. (a) Vektorerna $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är linjärt oberoende, så $\mathrm{Span}(\vec{v}, \vec{w})$ är mycket riktigt ett plan (genom origo). En normalvektor till planet är

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1, & 2, & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En ekvation (i koordinater (x_1, x_2, x_3)) är därmed $-x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$.

(b) Vi har att $-1 \cdot 0 + 2(-2) + 4 = 0$, så $\vec{z}$ ligger i $\mathrm{Span}(\vec{v}, \vec{w})$.

(c) Vi kollar om $\vec{u}$ ligger i planet: $-1 + 2 \cdot 2 + 1 = 4 \neq 0$, så $\vec{u}$ ligger ej i planet $\mathrm{Span}(\vec{v}, \vec{w})$. Detta medf'Äor att $\vec{v}$, $\vec{w}$, och $\vec{u}$ är 3 linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$, så de bildar en bas för $\mathbb{R}^3$.

(d) Matrisen A har kolonnerna $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{u}$, och $\vec{z}$. Rangen av matrisen är därmed 3, eftersom kolonnrummet har dimension 3.

Svar.

3. Anpassa kurvan $y = ax^2+bx+c$ med minstakvadratmetoden till följande tabell av mätdata

x	-1	0	1	2
y	2	0	2	4

(4 p)

Lösningsförslag. Dessa mätdata ger ett ekvationssystem i a, b, och c, med utökad matris

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Låt $\vec{d}$ vara den 4:e kolonnen och skriv $\vec{x} = \begin{bmatrix} a, & b, & c \end{bmatrix}^T$, då är systemet $A\vec{x} = \vec{d}$, där A är koefficientmatrisen. Vi tittar nu på systemet $A^TA\vec{x} = A^T\vec{d}$:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A^T\vec{d} = \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Vi löser systemet:

$$\begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 & 20 \\ 8 & 6 & 2 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 9 & 4 & 3 & 10 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 - 2r_2 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & -3 & -4 \\ 0 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - 3r_3 \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -10 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Så $b = -\frac{1}{5}$; då $-\frac{7}{5} - c = -2$, så att $c = \frac{3}{5}$; sedan $a + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 2$, så $a = 1$.

Kurvan som enligt minstakvadratmetoden är bäst anpassad är $y = x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$.

Svar.

DEL B

4. Planet H ges av ekvationen $3x - 5y + 3z = 0$.
   (a) Bestäm en orthonormal (ON) bas β för H. **(1 p)**
   (b) Utvidga β till en ON-bas för $\mathbb{R}^3$. **(1 p)**
   (c) Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara ortogonala projektionen på H. Bestäm en matrisrepresentation för T. **(2 p)**

Lösningsförslag. (a) Vi har att $\dim H = 2$, så vi ska hitta 2 oberoende vektorer i H för att få en bas. Genom att sätta $y = 0$ hittar vi vektorn $\vec{a} = \begin{bmatrix}1, & 0, & -1\end{bmatrix}^T$; genom att sätta $z = 0$ hittar vi vektorn $\vec{b} = \begin{bmatrix}5, & 3, & 0\end{bmatrix}^T$. De är oberoende, så de bildar en bas för H.

Med Gram-Schmidt-metoden får vi en ortogonal bas: $\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = t\vec{a}$, med $t = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \frac{5}{2}$; då bildar $\vec{a}$ och $\vec{c} = \vec{b} - t\vec{a} = \vec{b} - \frac{5}{2}\vec{a} = \begin{bmatrix}\frac{5}{2}, & 3, & \frac{5}{2}\end{bmatrix}^T$ en ortogonal bas för H. Även $\vec{a}$ och $2\vec{c} = \begin{bmatrix}5, & 6, & 5\end{bmatrix}^T$ gör detta. Till slut får vi en ON-bas genom att dela varje vektor genom sin längd: $\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}, & 0, & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$ och $\frac{1}{\sqrt{86}}\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{86}}\begin{bmatrix}5, & 6, & 5\end{bmatrix}^T$ bildar en ON-bas för H.

(b) Det är bara att lägga till en enhetsnormalvektor till H, tex: $\vec{d} = \frac{1}{\sqrt{43}}\begin{bmatrix}3, & -5, & 3\end{bmatrix}^T$.

(c) Vi vet att $T(\vec{a}) = \vec{a}$, $T(\vec{c}) = \vec{c}$, och $T(\vec{d}) = \vec{0}$. Så i basen $\{\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\}$ har T matrisrepresentationen $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

Svar.

5. Enligt *Cayley-Hamiltons sats* gäller att varje kvadratisk matris uppfyller sin egen karaktäristiska ekvation. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla egenvektorer till A med egenvärde 2. **(1 p)**
(b) Beräkna det karaktäristiska polynomet $P_A(x)$ för matrisen A. **(2 p)**
(c) Verifiera att Cayley-Hamiltons sats gäller för matrisen genom att beräkna $P_A(A)$. **(1 p)**

Lösningsförslag. (a) Vi beräknar nollrummet $\mathrm{Ker}(A - 2I)$:

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Så nollrummet $\mathrm{Ker}(A-2I)$ spänns upp av $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Egenvektorerna med egenvärdet 2 är exakt alla **nollskilda** multipler av denna vektor.

(b) Vi har att

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 1 \\ -2 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 2 - 2 + \lambda + \lambda + 4\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda - 4.$$

Det karaktäristiska polynomet $P_A(x)$ är $x^3 - 6x + 4$.

(c) Vi beräknar att

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

och att

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -12 & 6 \\ -12 & -4 & 6 \\ 6 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Observera att den konstanta termen 4 i polynomet blir $4A^0 = 4I$. Vi ser nu att

$$A^3 - 6A + 4I = \begin{bmatrix} -4 & -12 & 6 \\ -12 & -4 & 6 \\ 6 & 6 & -4 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket stämmer.

Svar.

6. Linjen L i $\mathbb{R}^3$ går genom origo. En riktningsvektor för linjen bildar vinkeln $60°$ mot den positiva x-axeln och vinkeln $45°$ mot den positiva y-axeln. Linjen L skär planet

$$x + \sqrt{2}y - 3z = 6$$

i punkten P. Bestäm P. **(4 p)**

Lösningsförslag. Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ vara en normerad riktningsvektor till L och låt $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ och $\vec{e}_z$ vara standardbasvektorerna. Då är $a = \vec{u} \cdot \vec{e}_x = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{e}_x\| \cdot \cos 60° = 1/2$ och $b = \vec{u} \cdot \vec{e}_y = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{e}_y\| \cdot \cos 45° = 1/\sqrt{2}$. Eftersom $\vec{u}$ är normerad har vi att $c = \pm\sqrt{1 - a^2 - b^2} = \pm 1/2$.

Låt $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -3 \end{bmatrix}$ som ju är en normalvektor till planet. Om $c = 1/2$ är $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ vilket betyder att linjen L är parallell med planet. Men detta är omöjligt eftersom vi vet att L skär planet utan att ligga i planet (för planet innehåller inte origo). Alltså är $c = -1/2$.

Skärningspunkten P ligger på linjen L så den kan skrivas $P = t\vec{u}$ för något reellt tal t. Eftersom P ligger i planet gäller att $\vec{n} \cdot (t\vec{u}) = 6$ så

$$t = \frac{6}{\vec{n} \cdot \vec{u}} = \frac{6}{3} = 2.$$

Punkten P har alltså koordinaterna $(1, \sqrt{2}, -1)$.

DEL C

7. I datortomografi behöver man kunna hålla reda på alla linjer i planet genom att ge dem *koordinater*. Ett sätt att göra det är genom att till en linje i planet tillordna paret (r, φ) där $r > 0$ och $0 \leq \varphi < 2\pi$ fås genom att $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ är den punkt på linjen som ligger närmast origo. Vi är bara interesserade av linjer som inte går genom origo.
   (a) Bestäm en ekvation på formen $ax + by + c = 0$ för linjen med koordinater (r, φ). **(2 p)**
   (b) Visa att linjerna (r_1, φ_1) och (r_2, φ_2) är parallella om och endast om **(2 p)**

$$\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) = \cos(\varphi_2)\sin(\varphi_1).$$

Lösningsförslag. (a) Låt (r, φ) vara en given linje. Då är $\begin{bmatrix} r\cos\varphi, & r\sin\varphi \end{bmatrix}^T$ och speciellt $\begin{bmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi \end{bmatrix}^T$ normalvektorer till linjen. Dvs. vi kan sätta $a = \cos\varphi$ och $b = \sin\varphi$. Linjen går genom punkten $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$; detta ger att $c = -r$. Ekvationen blir $(\cos\varphi)x + (\sin\varphi)y - r = 0$.

(b) Linjerna (r_1, φ_1) och (r_2, φ_2) är parallella om och endast om deras normalvektorer är parallella. Två vektorer är parallella om och endast om determinanten är noll, dvs. att $\begin{vmatrix} \cos\varphi_1 & \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 \end{vmatrix} = 0$. Detta är i sin tur ekvivalent med att $\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) = \cos(\varphi_2)\sin(\varphi_1)$.

Svar.

8. Kurvan C i $\mathbb{R}^2$ ges av ekvationen $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 12 = 0$. Låt $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ vara basen med vektorerna
$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.$$
Visa att koordinatvektorerna $\begin{bmatrix}z\\w\end{bmatrix}$ för vektorer på kurvan C, med avseende på basen β, satisfierar ekvationen $z^2 - 4w^2 = 6$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Låt σ vara standardbasen. För en vektor $\vec{p}$ i $\mathbb{R}^2$ vet vi då att
$$[\vec{p}]_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}[\vec{p}]_\beta,$$
så koordinatvektorer $\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}^T$ för punkter på kurvan i standardbasen är relaterade till koordinatvektorer $\begin{bmatrix}z & w\end{bmatrix}^T$ enligt följande
$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z\\w\end{bmatrix}.$$
Vi vet även att
$$\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -5\\-5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = -12.$$
Nu byter vi ut $\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}^T$ med uttrycket för $\begin{bmatrix}z & w\end{bmatrix}^T$. Eftersom
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -5\\-5 & 3\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & -2\\-8 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix} =$$
$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4 & 0\\0 & 16\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 0\\0 & 8\end{bmatrix}$$
får vi ekvationen $-2z^2 + 8w^2 = -12$ för C, eller också ekvationen $z^2 - 4w^2 = 6$ (ekvivalent med den förra).

Svar.

9. Låt P_n vara vektorrummet av polynom $p(x)$ av grad högst n. Den linjära avbildningen $T\colon P_n \to P_n$ definieras som
$$T(p(x)) = \frac{1}{x}(p(x) - p(0)).$$
   (a) Låt $n = 3$. Bestäm matrisrepresentationen till avbildningen T med avseende på basen $\{1, x, x^2, x^3\}$. **(1 p)**
   (b) Låt $n = 10$. Bestäm det minsta heltalet m sådan att $T^m = 0$. **(1 p)**
   (c) Låt $n = 100$. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer av avbildningen T. **(2 p)**

Lösningsförslag. (a) Vi har att $T(1) = 0$; $T(x) = 1$; $T(x^2) = x$; $T(x^3) = x^2$. Matrisen blir
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi ser att $T(x^k) = x^{k-1}$ för $k \geq 1$, medan $T(1) = 0$. Vi har även att $T^2(x^k) = x^{k-2}$ för $k \geq 2$, medan $T^2(x^l) = 0$ för $l < 2$. På liknande sätt får vi att $T^9(x^{10}) = x$; $T^{10}(x^{10}) = 1$; och $T^{11}(x^{10}) = 0$. Självklart gäller även att $T^{11}(x^k) = 0$ för alla $k \leq 10$. Så $m = 11$ är det minsta heltalet så att $T^m = 0$.

(c) Vi inser nu att T^{101} är noll-avbildningen, dvs. $T^{101} = 0$. Om $\vec{v}$ är en egenvektor med egenvärde λ, då har vi att $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Det följer då att $T^{101}(\vec{v}) = \lambda^{101}(\vec{v})$, så $\lambda^{101} = 0$, så $\lambda = 0$. Med andra ord har vi att 0 är det enda egenvärdet. Eftersom $T(p_{100}x^{100} + \cdots + p_1x + p_0) = p_{100}x^{99} + \cdots + p_2x + p_1$, gäller $T(p(x)) = 0$ om och endast om $p_{100} = \cdots = p_1 = 0$ om och endast om $p(x)$ är ett konstant polynom. De enda egenvektorerna (nödvändigtvis med egenvärdet 0) är då de konstanta nollskilda polynomen. (Egenrummet har dimension 1.)