



KTH Teknikvetenskap

**SF1670 Flervariabelanalys II**  
**Lösningsförslag till tentamen 2015-01-12**

DEL A

1. Betrakta funktionen  $f(x, y) = x^2 + y$  och området  $D$  som ges av olikheterna

$$x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{och} \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

- (a) Förklara varför man i förväg kan veta att funktionen  $f$  antar ett största och ett minsta värde på området  $D$ . **(1 p)**
- (b) Bestäm det största och det minsta värdet som  $f$  antar på  $D$ . **(3 p)**

**Lösningsförslag.**

- (a) Funktionen är ett polynom och därmed kontinuerlig. Området är både slutet och begränsat, dvs kompakt. Därmed måste funktionen anta ett största och ett minsta värde i området enligt sats i boken.
- (b) Maximum och minimum kan antingen antas i stationära punkter i det inre av området, eller på randen. Stationära punkter ges av nollställena hos gradienten och vi får att grad  $f(x, y) = (2x, 1)$  som aldrig är noll. Det finns därmed inga stationära punkter. Det återstår att kontrollera randen. Den består av två enhetsintervall längs koordinataxlarna och en kvartscirkel. På  $x$ -axeln har vi  $f(x, 0) = x^2$  som varierar från 0 till 1 på intervallet  $0 \leq x \leq 1$ . Längs  $y$ -axeln har vi  $f(0, y) = y$  som också varierar mellan 0 och 1 på intervallet  $0 \leq y \leq 1$ . Längs kvartscirkeln kan vi använda parametriseringen  $(x, y) = (\cos t, \sin t)$  och får då

$$f(x, y) = \cos^2 t + \sin t = 1 - \sin^2 t + \sin t = 1 - \left(\sin t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} - \left(\sin t - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Eftersom  $\sin t$  varierar mellan 0 och 1 får vi det största värdet på cirkelbågen som  $5/4$  och det minsta som  $1 = 5/4 - 1/4$ . När vi jämför de olika kandidaterna till största och minsta värde på  $D$  ser vi att  $5/4$  är störst och 0 minst.

**Svar.**

- (a) Enligt sats ur boken antar kontinuerliga funktioner maximum och minimum på kompakta områden.
- (b) Det största värdet är  $5/4$  och det minsta värdet är 0.

2. Använd en linjarisering kring punkten  $(x_0, y_0) = (1, 2)$  för att approximera värdet av funktionen  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$  i punkten  $(1, 2, 2, 1)$ . **(4 p)**

**Lösningförslag.** Linjariseringen av funktionen ges av gradienten. Vi har att

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + (x - x_0, y - y_0) \cdot \text{grad } f(x_0, y_0).$$

Vi beräknar först gradienten som

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \left( \frac{2x_0}{2\sqrt{x_0^2 + 2y_0^2}}, \frac{4y_0}{2\sqrt{x_0^2 + 2y_0^2}} \right) = \left( \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 2y_0^2}}, \frac{2y_0}{\sqrt{x_0^2 + 2y_0^2}} \right)$$

vilket i punkten  $(x_0, y_0) = (1, 2)$  ger

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \left( \frac{1}{\sqrt{1+8}}, \frac{4}{\sqrt{1+8}} \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{9}}, \frac{4}{\sqrt{9}} \right) = \left( \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right).$$

Därmed har vi enligt linjariseringen att

$$f(1, 2, 2, 1) \approx f(1, 2) + (0, 2, 0, 1) \cdot \left( \frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right) = 3 + \frac{0,6}{3} = 3,2$$

**Svar.** Linjariseringen ger att  $f(1, 2, 2, 1) \approx 3,2$ .

3. Beräkna integralen

$$\iint_T 2xy \, dx \, dy$$

där  $T$  är triangeln med hörn i punkterna  $(0, 0)$ ,  $(2, 1)$  och  $(0, 3)$ , exempelvis genom att utföra variabelbytet  $x = 2u$  och  $y = u + 3v$ . **(4 p)**

**Lösningförslag.** Om vi väljer att genomföra koordinatbytet kommer triangeln att avbildas på en triangel och hörnen i den nya triangeln ges av  $(u, v) = (0, 0)$ ,  $(u, v) = (1, 0)$  och  $(u, v) = (0, 1)$ . Jacobianen vid koordinatbytet ges av

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

Integranden ersätts med  $2xy = 2(2u)(u + 3v) = 4u^2 + 12uv$  och vi kan beräkna integralen genom upprepad integration.

$$\begin{aligned} \iint_T 2xy \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^{1-v} (4u^2 + 12uv) \cdot 6 \, du \, dv \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{4}{3}u^3 + 6u^2v \right]_0^{1-v} \cdot 6 \, dv \\ &= \int_0^1 8(1-v)^3 + 36(1-v)^2v \, dv \\ &= \left[ -2(1-v)^4 + 36 \cdot \frac{v^2}{2} - 72 \cdot \frac{v^3}{3} + 36 \frac{v^4}{4} \right]_0^1 \\ &= 2 + 18 - 24 + 9 = 5. \end{aligned}$$

**Svar.**  $\iint_T 2xy \, dx \, dy = 5$

## DEL B

4. Vektorfältet  $\mathbf{F}(x, y)$  är definierat i  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , dvs i  $xy$ -planet förutom origo, genom

$$\mathbf{F}(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

- (a) Beräkna  $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  där  $\gamma_1$  är enhetscirkeln  $x^2 + y^2 = 1$  orienterad moturs. **(2 p)**  
 (b) Beräkna  $\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  där  $\gamma_2$  är cirkeln  $(x - 3)^2 + y^2 = 1$  orienterad moturs. **(1 p)**  
 (c) Förklara hur vi kan veta att  $\mathbf{F}(x, y)$  inte är konservativt. **(1 p)**

**Lösningförslag.**

- (a) Vi parametriserar cirkeln  $\gamma_1$  genom  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ . Därmed har vi att  $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt = (-\sin t, \cos t) dt$  och

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi. \end{aligned}$$

- (b) Cirkeln  $\gamma_2$  innesluter inte origo, den enda punkt där  $\mathbf{F}$  inte är definierat och kontinuerligt deriverbart. Därmed kan vi använda Greens formel och med

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{och} \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

har vi att

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \left( -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Därmed är

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} P dx + Q dy = \iint_C \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

där  $C$  är området som innesluts av  $\gamma_2$ .

- (c) Om  $\mathbf{F}$  skulle varit konservativt skulle båda integralerna ha varit noll eftersom integralen av ett konservativt fält är noll över varje sluten kurva.

**Svar.**

(a)  $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$

(b)  $\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$

- (c) Om  $\mathbf{F}$  hade varit konservativt hade båda integralerna varit noll.

5. De två vektorvärda funktionerna  $\mathbf{f}$  och  $\mathbf{g}$  ges av

$$\mathbf{f}(x, y) = (x \cos y, x \sin y) \quad \text{och} \quad \mathbf{g}(x, y) = (xy, x^2 - y^2)$$

för alla  $(x, y)$  i  $\mathbb{R}^2$ .

(a) Beräkna Jacobimatriserorna  $D\mathbf{f}(x, y)$  och  $D\mathbf{g}(x, y)$ . (2 p)

(b) Jacobimatrisen för sammansättningen  $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  kan fås genom en matrismultiplikation. Illustrera detta genom att beräkna Jacobimatrisen  $D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(x, y)$ . (2 p)

### Lösningförslag.

(a) Vi beräknar Jacobimatriserorna som

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix}$$

och

$$D\mathbf{g}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

(b) När vi beräknar sammansättningens Jacobimatris genom matrismultiplikation behöver vi komma ihåg att beräkna  $D\mathbf{g}(x, y)$  i punkte  $\mathbf{f}(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$ . Vi får därmed

$$\begin{aligned} D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(x, y) &= D\mathbf{g}(x \cos y, x \sin y) D\mathbf{f}(x, y) \\ &= \begin{pmatrix} x \sin y & x \cos y \\ 2x \cos y & -2x \sin y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \sin y \cos y + x \cos y \sin y & -x^2 \sin^2 y + x^2 \cos^2 y \\ 2x \cos^2 y - 2x \sin^2 y & -2x^2 \cos y \sin y - 2x^2 \sin y \cos y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x \cos y \sin y & x^2(\cos^2 y - \sin^2 y) \\ 2x(\cos^2 y - \sin^2 y) & -4x^2 \cos y \sin y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vi kontrollerar att det stämmer genom att se på

$$\mathbf{g} \circ \mathbf{f} = (x \cos y \cdot x \sin y, x^2 \cos^2 y - x^2 \sin^2 y) = (x^2 \cos y \sin y, x^2(\cos^2 y - \sin^2 y)).$$

vilket ger Jacobimatrisen

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \cos y \sin y & x^2(\cos^2 y - \sin^2 y) \\ 2x(\cos^2 y - \sin^2 y) & -4x^2 \cos y \sin y \end{pmatrix}.$$

### Svar.

$$(a) \quad D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D\mathbf{g}(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \cos y \sin y & x^2(\cos^2 y - \sin^2 y) \\ 2x(\cos^2 y - \sin^2 y) & -4x^2 \cos y \sin y \end{pmatrix}.$$

6. Arealen av en buktig yta kan beräknas genom formeln

$$\iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right| ds dt$$

där  $\mathbf{r}(s, t)$  är en parametrisering av ytan över området  $D$  i  $st$ -planet.

Vi ska se på ytan som ges av den del av enhetsfären  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  som ligger ovanför planet  $z = 1/2$ .

(a) Skriv upp den dubbelintegral som behöver beräknas om vi använder sfäriska koordinater, dvs  $(x, y, z) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$ , för att beräkna ytans area. (1 p)

(b) Skriv upp den dubbelintegral som behöver beräknas om vi använder cylindriska koordinater, dvs  $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \sqrt{1 - r^2})$ , för att beräkna ytans area. (1 p)

(c) Beräkna ytans area genom att beräkna någon av de två dubbelintegralerna från deluppgift (a) och (b). (2 p)

### Lösningförslag.

(a) Vi beräknar först de två derivatorna med avseende på parametrarna

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi)$$

och

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-\sin \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \theta, 0).$$

Därmed kan vi beräkna kryssprodukten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= (\cos \varphi \sin \theta \cdot 0 - (-\sin \varphi) \sin \varphi \cos \theta, \\ &\quad -\sin \varphi(-\sin \varphi \sin \theta) - \cos \varphi \cos \theta \cdot 0, \\ &\quad \cos \varphi \cos \theta \sin \varphi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta(-\sin \varphi \sin \theta)) \\ &= (\sin^2 \varphi \cos \theta, \sin^2 \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \varphi(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)) \\ &= (\sin^2 \varphi \cos \theta, \sin^2 \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \varphi). \end{aligned}$$

Längden av detta ges nu av

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right| &= \sqrt{\sin^4 \varphi \cos^2 \theta + \sin^4 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} \\ &= \sqrt{\sin^4 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} = \sqrt{\sin^2 \varphi} = |\sin \varphi|. \end{aligned}$$

Vi behöver också ta reda på gränserna. Planet  $z = 1/2$  möter sfären i de punkter där  $x^2 + y^2 = 3/4$ , vilket motsvarar  $\varphi = \pi/3$ . Alltså behöver vi beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \sin \varphi d\varphi d\theta.$$

(b) I den andra parametriseringen får vi

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$$

och

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \left( \cos \theta, \sin \theta, -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \right).$$

Kryssprodukten blir nu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} &= \left( r \cos \theta \cdot \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}} - 0 \cdot \sin \theta, 0 \cdot \cos \theta - \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-r^2}}, -r \sin^2 \theta - r \cos^2 \theta \right) \\ &= \left( -\frac{r^2 \cos \theta}{\sqrt{1-r^2}}, -\frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-r^2}}, -r \right) \end{aligned}$$

Längden av kryssprodukten blir

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| = \sqrt{\frac{r^4 \cos^2 \theta}{1-r^2} + \frac{r^4 \sin^2 \theta}{1-r^2} + r^2} = \sqrt{\frac{r^4 + r^2(1-r^2)}{1-r^2}} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Integrationsgränserna ges den här gången av  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  och  $0 \leq r \leq \sqrt{3}/2$ .  
Integralen som ska beräknas är därmed

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr d\theta.$$

(c) I det första fallet ska vi beräkna

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \sin \varphi d\varphi d\theta = 2\pi [-\cos \varphi]_0^{\pi/3} = 2\pi(-1/2 - (-1)) = \pi$$

och i det andra fallet ska vi beräkna

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = 2\pi [-\sqrt{1-r^2}]_0^{\sqrt{3}/2} = 2\pi(-1/2 - (-1)) = \pi.$$

**Svar.**

(a)  $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \sin \varphi d\varphi d\theta$

(b)  $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr$

(c) Ytans area är  $\pi$  areaenheter.

## DEL C

7. Betrakta ekvationen

$$x^y + y^{2x} = 2$$

i området  $x, y > 0$ .

- (a) Visa att denna ekvation i en omgivning av punkten  $(x, y) = (1, 1)$  definierar  $y$  som en funktion av  $x$ , alltså  $y = f(x)$ . **(2 p)**  
 (b) Bestäm derivatan  $f'(1)$ , där  $f$  är funktionen från deluppgift (a). **(2 p)**

**Lösningförslag.**

- (a) Enligt implicita funktionssatsen räcker det att kontrollera att den partiella derivatan av vänsterledet med avseende på  $y$  inte är noll i punkten i fråga i och med att vänsterledet har kontinuerliga partialderivator.

Med  $g(x, y) = x^y + y^{2x}$  får vi att

$$\frac{\partial g}{\partial y} = (\ln |x|)x^y + 2x \cdot y^{2x-1} \implies \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = (\ln |1|)1^1 + 2 \cdot 1 \cdot 1^1 = 2 \neq 0.$$

- (b) Vi kan använda implicit derivering för att eberäkna derivatan av  $f(x)$ . Derivatan av ekvationen med avseende på  $x$  blir

$$yx^{y-1} + (\ln |x|)x^y f'(x) + 2(\ln |y|)y^{2x} + 2x \cdot y^{2x-1} f'(x) = 0$$

vilket med  $(x, y) = (1, 1)$  ger

$$1 + 0 \cdot f'(1) + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot f'(1) = 0$$

och  $f'(1) = -1/2$ .

Vi kan också göra detta genom att se att derivatan av  $h(x) = g(x, f(x))$  ges av

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} f'(x)$$

och eftersom  $h(x) = 2$  får vi  $h'(x) = 0$  och  $f'(x) = -\frac{\partial g}{\partial x} / \frac{\partial g}{\partial y}$ . Vi har redan räknat ut  $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1)$  och räknar ut den andra partialderivatan som

$$\frac{\partial g}{\partial x} = yx^{y-1} + 2(\ln |y|)y^{2x} \implies \frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 1 \cdot 1^{1-1} + 2(\ln |1|)1^{2 \cdot 1} = 1.$$

Därmed fås på nytt  $f'(1) = -1/2$ .

**Svar.**

- (a) Enligt implicita funktionssatsen definierar ekvationen  $y$  som en funktion av  $x$  nära  $(x, y) = (1, 1)$ .  
 (b) Derivatan är  $f'(1) = -1/2$ .



8. Låt  $\Omega$  vara området som ges av olikheterna  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$  och  $x^2 + y^2 \geq a^2$ , och låt

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + yz, -xz + y, z - e^x \sin y).$$

Beräkna flödet av vektorfältet  $\mathbf{F}$  ut från  $\Omega$ .

(4 p)

**Lösningförslag.** Vi kan använda divergenssatsen för att beräkna flödet ut från  $\Omega$ . Divergen-  
sen av  $\mathbf{F}$  ges av

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Därmed ges flödet ut ur området  $\Omega$  av

$$\iiint_{\Omega} 3 \, dx \, dy \, dz.$$

För att beräkna denna trippelintegral kan vi använda cylinderkoordinater och får  $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ . Integrationsgränserna ges av

$$a \leq r \leq 2a \quad \text{och} \quad -\sqrt{4a^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4a^2 - r^2}.$$

Vi integrerar först i  $z$ -led och får då

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} 3 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \int_a^{2a} \int_{-\sqrt{4a^2 - r^2}}^{\sqrt{4a^2 - r^2}} 3r \, dz \, dr \, d\theta = 2\pi \int_a^{2a} 6r \sqrt{4a^2 - r^2} \, dr \\ &= 2\pi \left[ -3 \cdot \frac{2}{3} (4a^2 - r^2)^{3/2} \right]_a^{2a} = 2\pi (-2 \cdot 0 + 2 \cdot (3a^2)^{3/2}) = 12\pi |a|^3 \sqrt{3}. \end{aligned}$$

**Svar.** Flödet av  $\mathbf{F}$  ut ur  $\omega$  är  $6|a|^3 \sqrt{3}$ .

9. Låt  $\ell$  vara en linje och  $K$  en kropp i rummet. Beteckna det kortaste avståndet från punkten  $(x, y, z)$  till linjen  $\ell$  med  $D(x, y, z)$  och kroppens konstanta masstäthet med  $\rho$ . Tröghetsmomentet för  $K$  med avseende på linjen  $\ell$  definieras genom

$$I_\ell = \rho \iiint_K D(x, y, z)^2 dx dy dz.$$

Beräkna tröghetsmomentet för en homogen kub  $K$  med kantlängd  $s$  och massa  $m$  med avseende på axeln genom mittpunkten på två motstående sidor. **(4 p)**

**Lösningförslag.** Om vi placerar kuben i ett koordinatsystem med centrum i origo och hörnen i punkterna  $(\pm s/2, \pm s/2, \pm s/2)$  kan vi betrakta linjen  $\ell$  som  $z$ -axeln och funktionen  $D$  ges av  $D(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Densiteten ges av massan genom volymen dvs  $\rho = m/s^3$ . Därmed beräknar vi tröghetsmomentet som

$$\begin{aligned} I_\ell &= \rho \iiint_K D(x, y, z)^2 dx dy dz = \frac{m}{s^3} \int_{-s/2}^{s/2} \int_{-s/2}^{s/2} \int_{-s/2}^{s/2} (\sqrt{x^2 + y^2})^2 dx dy dz \\ &= \frac{m}{s^3} \int_{-s/2}^{s/2} \int_{-s/2}^{s/2} \int_{-s/2}^{s/2} x^2 + y^2 dx dy dz = \frac{m}{s} \int_{-s/2}^{s/2} x^2 dx + \frac{m}{s} \int_{-s/2}^{s/2} y^2 dy \\ &= \frac{m}{s} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-s/2}^{s/2} + \frac{m}{s} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-s/2}^{s/2} \\ &= \frac{m}{s} \cdot \frac{2s^3}{3 \cdot 8} + \frac{m}{s} \cdot \frac{2s^3}{3 \cdot 8} = \frac{ms^2}{6}. \end{aligned}$$

**Svar.** Tröghetsmomentet för  $K$  med avseende på linjen  $\ell$  är  $I_\ell = ms^2/6$ .

---