SF1669 Matematisk och numerisk analys II

Första föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

20 januari 2015

SF1669 Matematisk och numerisk analys – om kursen

- Examinator och kursansvarig: Mats Boij
- Föreläsare: Mats Boij och Olof Runborg
- Momentindelning
  - TEN1 (6hp), LAB1 (1hp), LAB2 (2hp), PRO1 (2hp)
- Skriftlig tentamen den 16 mars kl 08.00-13.00
- Sex seminarier (måndagar 26/1-2/3)
- Laborationsredovisningar
  - 20 februari (LAB1)
  - 27 april (LAB2).
- Projektredovisning (skriftlig rapport) i maj.
- Detaljerad kursinformation finns på https://www.kth.se/social/course/SF1669/

Nödvändiga förkunskaper

För att kunna tillgodogöra sig kursen krävs förkunskaper motsvarande

- SF1666/7 Tillämpad linjär algebra I eller II
- SF1668 Matematisk och numerisk analys I

Det euklidiska rummet $\mathbb{R}^n$

Definition

$\mathbb{R}^n$ är mängden av n-tiplar $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ av reella tal.

Vi har följande operationer på $\mathbb{R}^n$:

- Addition

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)+(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$

- Multiplikation med skalär

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

- Skalärprodukt

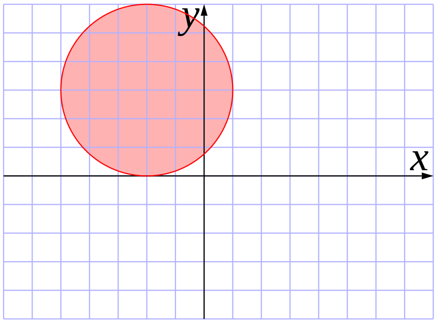
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Längden, eller beloppet, av en vektor $\mathbf{x}$ ges av $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.

Mängd i $\mathbb{R}^2$

Fråga

Hur beskrivs området som ges av nedanstående figur med en olikhet?



Klot i $\mathbb{R}^n$

För att kunna prata om vad som ligger nära en viss punkt i $\mathbb{R}^n$ inför vi begreppet öppet klot.

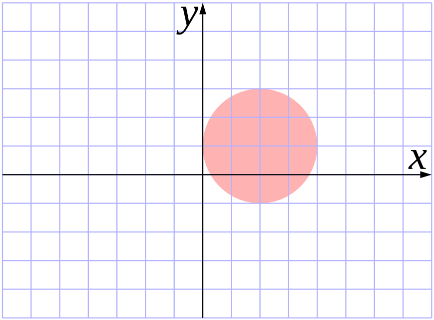
Definition

Det öppna klotet med centrum i $\mathbf{a}$ och radie r består av vektorerna $\mathbf{x}$ som uppfyller

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r.$$

Exempel

Till höger ses en bild av det öppna klotet i $\mathbb{R}^2$ med centrum i $(2, 1)$ och radie 2.
Obs! Cirkelskivans rand tillhör inte det öppna klotet.

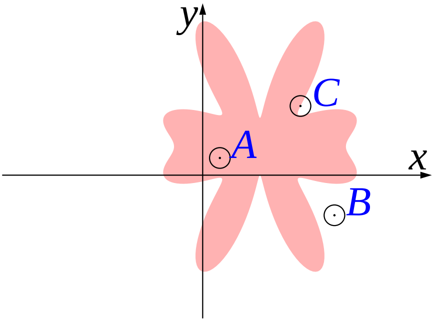


Inre punkter, yttre punkter och randpunkter

Definition

För en mängd M i $\mathbb{R}^n$ säger vi att . . .

- A är en inre punkt om det finns ett öppet klot kring A som ligger helt i mängden.
- B är en yttre punkt om det finns ett öppet klot kring B som ligger helt utanför mängden.
- C är en randpunkt om inget öppet klot kring C som ligger helt i eller helt utanför mängden.



Fråga

Finns det punkter som inte är något av dessa tre?

Öppna, slutna, begränsade och kompakta mängder

Definition

En mängd M i $\mathbb{R}^n$ är ...

- öppen om alla punkter är inre punkter.
- sluten om alla randpunkter tillhör mängden.
- begränsad om den ryms i något klot.
- kompakt om den är sluten och begränsad.

Exempel

- $1 < x^2 + y^2 < 2$ definierar en öppen begränsad mängd i $\mathbb{R}^2$.
- $1 \leq xy \leq 2$ definierar en sluten mängd som ej är begränsad.
- $1 < x^2 + y^2 \leq 2$ definierar en begränsad mängd som varken är öppen eller sluten.
- $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ definierar en kompakt mängd.

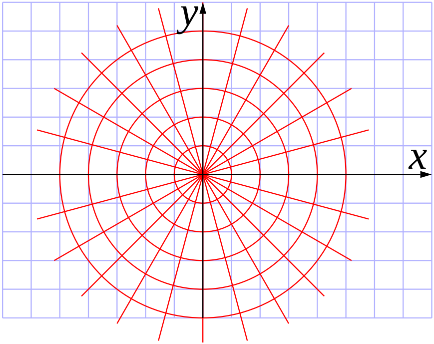
Polära koordinater

Definition

Relationerna

$$\begin{cases} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \end{cases}$$

definierar de polära koordinaterna $[r, \theta]$ för planet med de rätvinkliga koordinaterna (x, y).



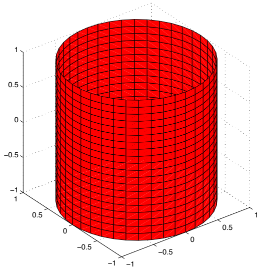
Cylindriska koordinater

Definition

Relationerna

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{cases}$$

definierar de cylindriska koordinaterna $[r, \theta, z]$ för rummet med de rätvinkliga koordinaterna (x, y, z).



Sfäriska koordinater

Definition

Relationerna

$$\begin{cases} x &= r\sin\phi\cos\theta \\ y &= r\sin\phi\sin\theta \\ z &= r\cos\phi \end{cases}$$

definierar de sfäriska koordinaterna $[r, \theta, \phi]$ för rummet med de rätvinkliga koordinaterna (x, y, z). Ibland kallas de också rymdpolära koordinater.