

Reglerteknik 2

Kapitel 5, 6



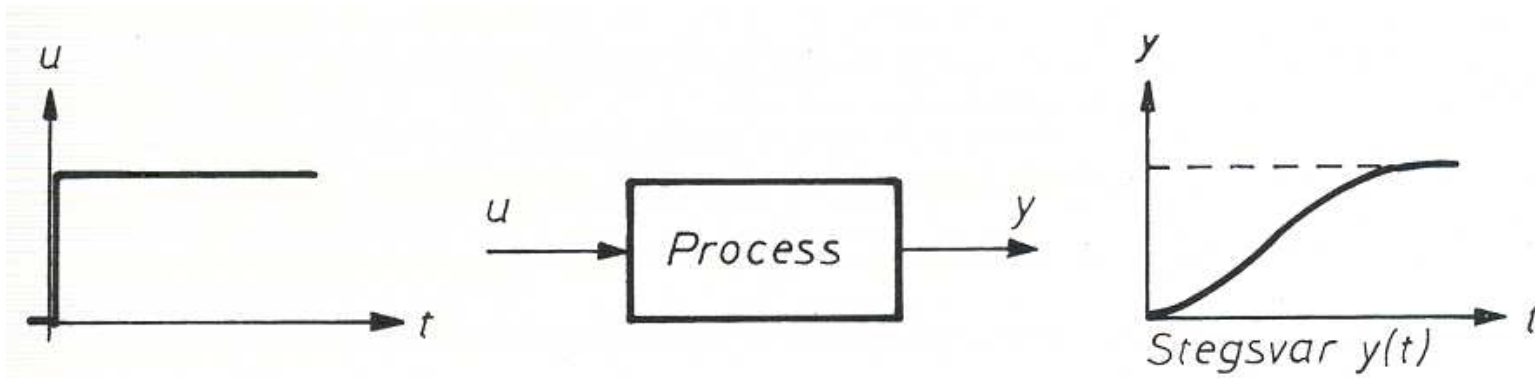
Köp bok och övningshäfte på kårbokhandeln

William Sandqvist william@kth.se

Lektion 2 kap 5, 6

- Differentialekvationer
- Laplace-transformer
- Dynamik hos vanliga processer

Stegsvar



Enhetssteget är den vanligaste "testsignalen".

Kommer Du ihåg ...

(Första ordningens differentialekvationer)

Stegsvar för ($u = \text{insignal}$, $y = \text{utsignal}$):

differentialekvation *enhetssteg* *begynnelsevärde*

$$\frac{dy}{dt} + ay = bu$$

$$u(t) = 1 \quad t > 0$$

$$y(0) = 0$$

$y = y_T + y_S$ Vi söker summan av en transient
och en stationär lösning

$$y_T : \quad \frac{d}{dt} y + ay = 0 \Rightarrow y_T(t) = C \cdot e^{-at} \quad \bullet \text{ Transient lösning}$$

Kontrollera (genom insättning):

$$\frac{d}{dt} C \cdot e^{-at} + a \cdot C \cdot e^{-at} = -a \cdot C \cdot e^{-at} + a \cdot C \cdot e^{-at} = 0$$

(Första ordningens differentialekvationer)

$$\frac{dy}{dt} + ay = b \Rightarrow y(t) = C \cdot e^{-at} + y_s$$

- Total lösning $y_T + y_s$
(y_s är en konstant)

Insättning:

$$0 + a \cdot y_s = b \Rightarrow y_s = \frac{b}{a}$$

- Stationär lösning

- sätt in begynnelsevärde

$$y(t) = C \cdot e^{-at} + \frac{b}{a} \quad \{ y(0) = 0 \} \quad 0 = C \cdot 1 + \frac{b}{a} \Rightarrow C = -\frac{b}{a}$$

$$y(t) = \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$$

William Sandqvist william@kth.se

(Ex. Första ordn. Differentialekvation)

Stegsvar för ($u =$ insignal, $y =$ utsignal): $\dot{y} + 5y = 28u$

Begynnelsevärde $y(0) = 0$. Enhetssteg $u(t) = 1$ för $t > 0$.

$$\dot{y} + 5y = 28 \quad y = y_T + y_S$$

$$y_T : \quad \dot{y} + 5y = 0 \Rightarrow y_T(t) = C \cdot e^{-5t} \quad \bullet \text{ Transient lösning}$$

$$y_S : \quad y_S = \frac{28}{5} \quad \bullet \text{ Stationär lösning}$$

$$y(t) = C \cdot e^{-5t} + \frac{28}{5} \quad \{ y(0) = 0 \} \Rightarrow C = -\frac{28}{5}$$

$$y(t) = \frac{28}{5} (1 - e^{-5t})$$

(Första ordningens differentialekvationer snabbformler)

differentialekvation *enhetssteg* *begynnelsevärde*

$$\frac{dy}{dt} + ay = bu$$

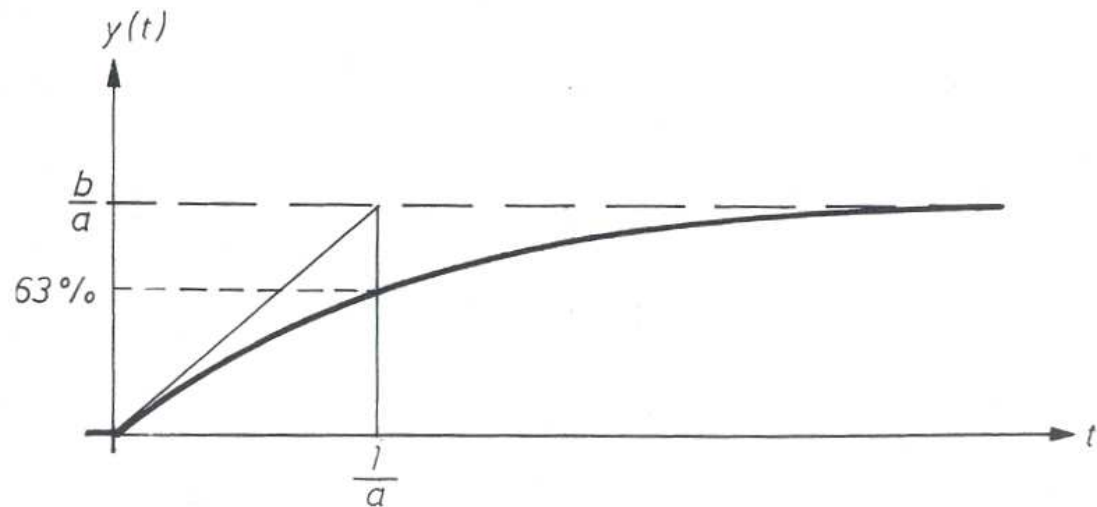
$$u(t) = 1 \quad t > 0$$

$$y(0) = 0$$

Du kan redan snabb-
formlerna:

$$x(t) = x_{\infty} - (x_{\infty} - x_0)e^{-\frac{t}{T}}$$

$$t = T \cdot \ln \frac{\text{"hela"}}{\text{"resten"}}$$



Kommer Du ihåg ...

(Andra ordningens differentialekvationer)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = bu \quad u(t) = 1 \quad t > 0 \quad \dot{y}(0) = 0 \quad y(0) = 0$$

• *Transient lösning – karakteristisk ekvation*

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = 0 \quad \{ KE \} \quad k^2 + a_1 k + a_2 = 0$$

1) Rötterna k_1 och k_2 reella och olika $y_T = A \cdot e^{k_1 t} + B \cdot e^{k_2 t}$

2) Rötterna k_1 och k_2 reella och lika = k $y_T = A \cdot e^{kt} (A + B \cdot t)$

3) Rötterna k_1 och k_2 komplexkonjugerade

$$k_1 = a + jd \quad k_2 = a - jd \quad y_T = e^{at} (A \cdot \cos dt + B \sin dt)$$

• *Stationär lösning* $y_s = \frac{b}{a_2}$

William Sandqvist william@kth.se

(Ex. Andra ordn. Differentialekvationer)

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = b \cdot u \quad y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 0 \quad u = 1 \quad t > 0$$

- *Transient lösning*

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 0 \quad \{ KE \} \quad k^2 + 5k + 6 = 0$$

$$k = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow$$

$$k_1 = -2 \quad k_2 = -3$$

p, q-formeln

$$y_T = A \cdot e^{-2t} + B \cdot e^{-3t}$$

- *Stationär lösning* $y_s = \frac{1}{6}$

(Ex. Andra ordn. Differentialekvationer)

- *Total lösning* $y_T + y_S$

$$y(t) = \frac{1}{6} + A \cdot e^{-2t} + B \cdot e^{-3t}$$

Insättning av begynnelsevärden:

$$y(0) = \frac{1}{6} + A + B = 0$$

$$\dot{y}(t) = -2A \cdot e^{-2t} - 3B \cdot e^{-3t} \Rightarrow$$

$$\dot{y}(0) = -2A - 3B = 0$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

$$B = -\frac{1}{3}$$

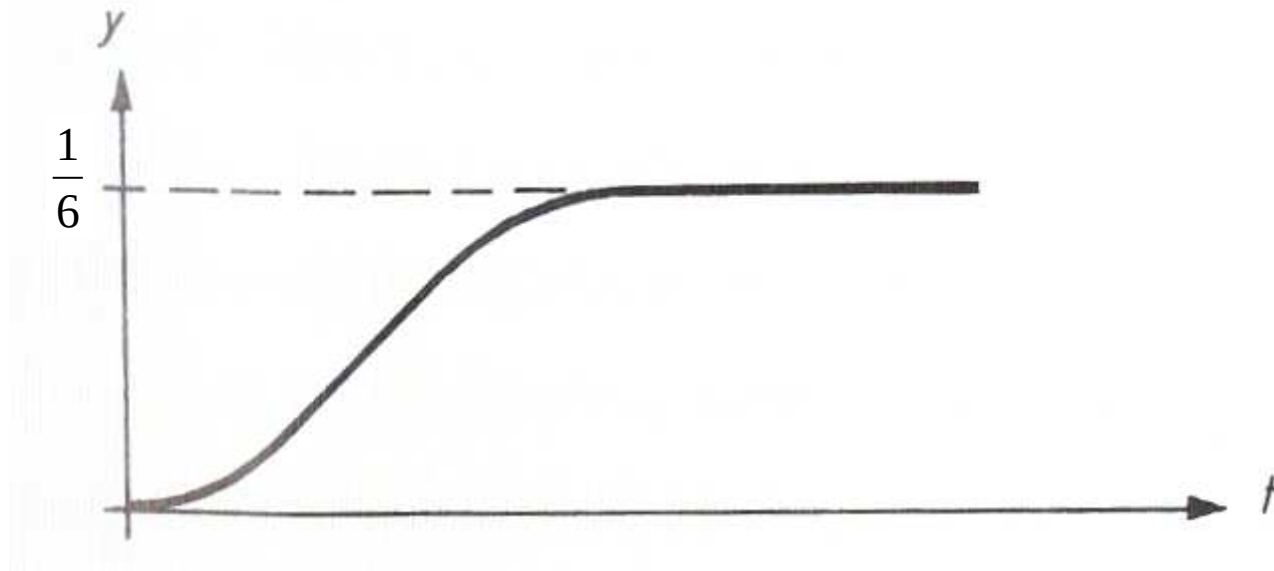
$$y(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot e^{-2t} + \frac{1}{3} \cdot e^{-3t}$$

Det blev ett stegsvar med två tidkonstanter.

(Ex. Andra ordn. Differentialekvationer)

$$y(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot e^{-2t} + \frac{1}{3} \cdot e^{-3t}$$

Det blev ett stegsvar med två tidkonstanter.





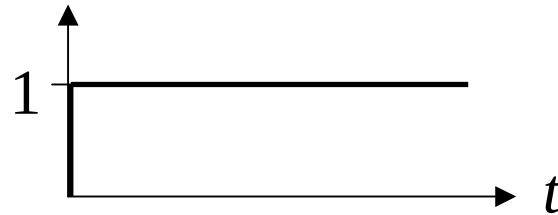
William Sandqvist william@kth.se

Laplacetransformen

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad f(t), \quad t > 0$$

Ex. Stegfunktion (Heaviside step function)

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



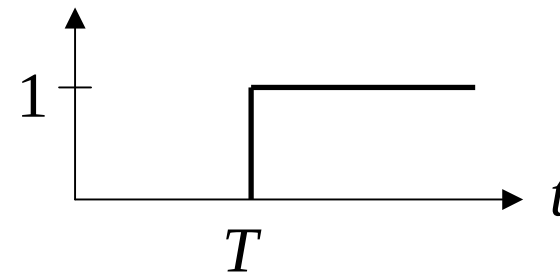
$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s}$$

Laplacestransformer

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad f(t), \quad t > 0$$

Ex. Födröjd stegfunktion

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < T \\ 1 & t \geq T \end{cases}$$



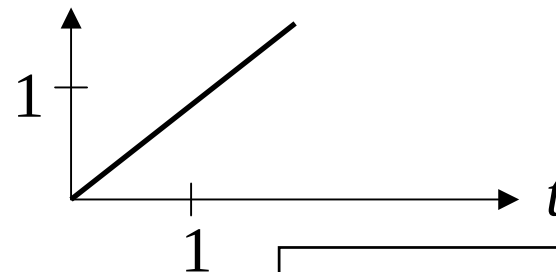
$$F(s) = \int_{0,T}^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_T^{\infty} = 0 - \left(-\frac{e^{-sT}}{s} \right) = \frac{1}{s} \cdot \underbrace{e^{-sT}}_{\text{Delay } T}$$

Laplacetransformer

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad f(t), \quad t > 0$$

Ex. Rampfunktion

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \cdot t & t \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \cdot t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-st}}{s} dt = \\ &= -\left[-\frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty} = -\left(0 - \frac{1}{s^2} \right) = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

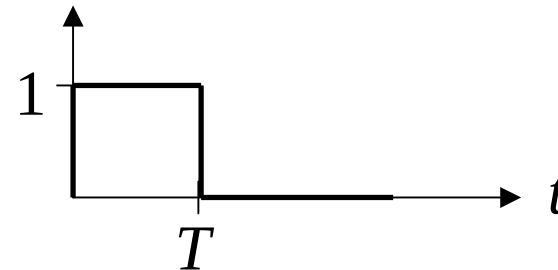
Partiell integrering:

$$\begin{aligned} \int f' \cdot g dt &= \\ &= f \cdot g - \int f \cdot g' \end{aligned}$$

Laplacestransformer

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad f(t), \quad t > 0$$

Ex. Rektangelpuls



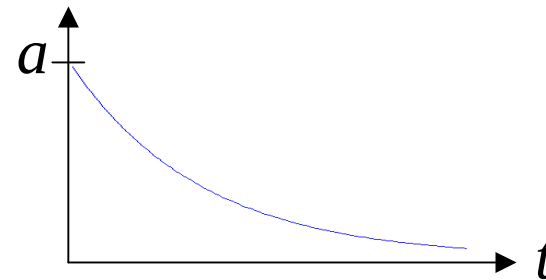
$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \cdot t \right]_0^T = -\frac{e^{-sT}}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT})$$

Laplacestransformer

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad f(t), \quad t > 0$$

Ex. Exponentialfunktion

$$e^{-at} \quad a > 0$$



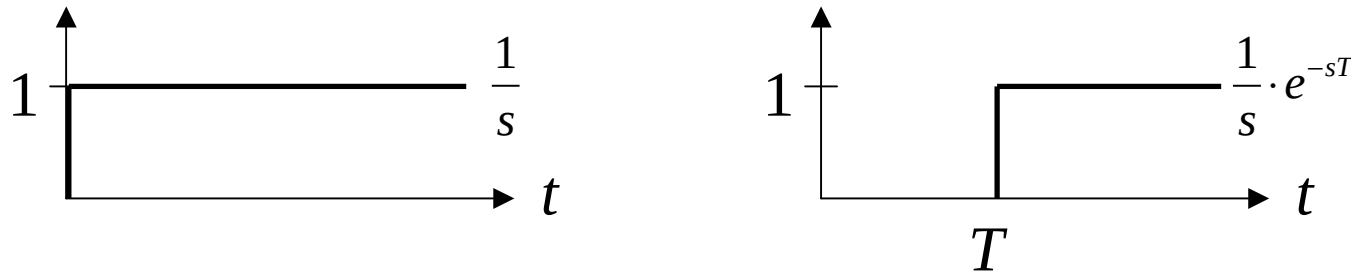
$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = \left[-\frac{e^{-(a+s)t}}{a+s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+s}$$

Superpositionsregeln

$$L[a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)] = a \cdot F_1(s) + b \cdot F_2(s)$$

Det var ju enkelt och bra ...

Fördröjningssatsen



$$L[f(t-T)] = F(s) \cdot e^{-Ts}$$

Fördröjningssatsen. En tidsfördröjd signal får exponentiellt dämpad Laplacetransform.

Dämpningssatsen. En exponentiellt dämpad signal får en förskjuten Laplacetransform.

$$L[f(t) \cdot e^{-at}] = F(s+a)$$

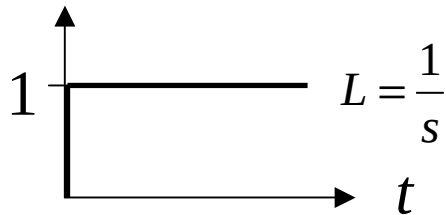
Derivata/integral

$$L[f'(t)] = s \cdot F(s) - f(0)$$

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s} \cdot F(s)$$

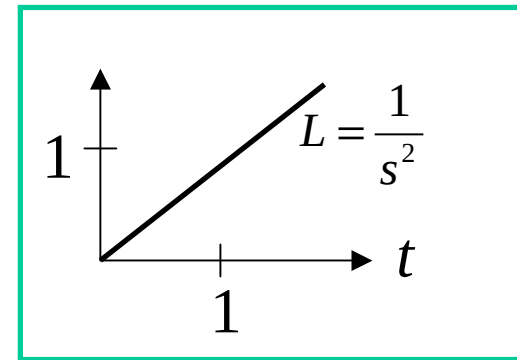
Deriveringssatsen och integreringssatsen är grunden för Laplacetransformens användbarhet vid lösandet av differentialekvationer.

Ex. Derivata/integral



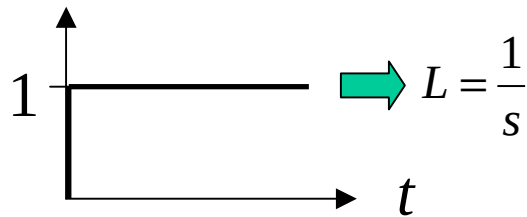
Rampen är ett
tidsintegrerat
Språng

- Integrering $1/s$



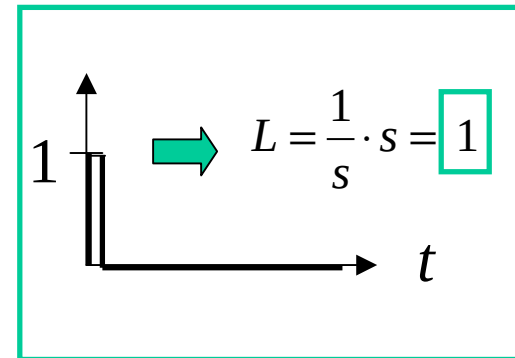
$$\text{språng} \Rightarrow \int dt \Rightarrow \text{rampa} \qquad \frac{1}{s} \Rightarrow \times \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{1}{s^2}$$

Ex. Derivata/integral



Impulsen är ett
tidsderiverat
Språng

- Derivering $\cdot s$



$$\text{Step} \Rightarrow \frac{d}{dt} \Rightarrow \text{Impulse}$$

$$\frac{1}{s} \Rightarrow \times s \Rightarrow 1$$

Testsignalerna **Språng**, **Ramp** och **Impuls** är besläktade med varandra och kan därför ge *samma* information om ett system.

Begynnelse och slutvärde

$$\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) \quad \bullet \text{ slutvärde}$$

*Vad som händer efter lång tid avgörs av
laplacetransformens lågfrekvenssegenskaper.*

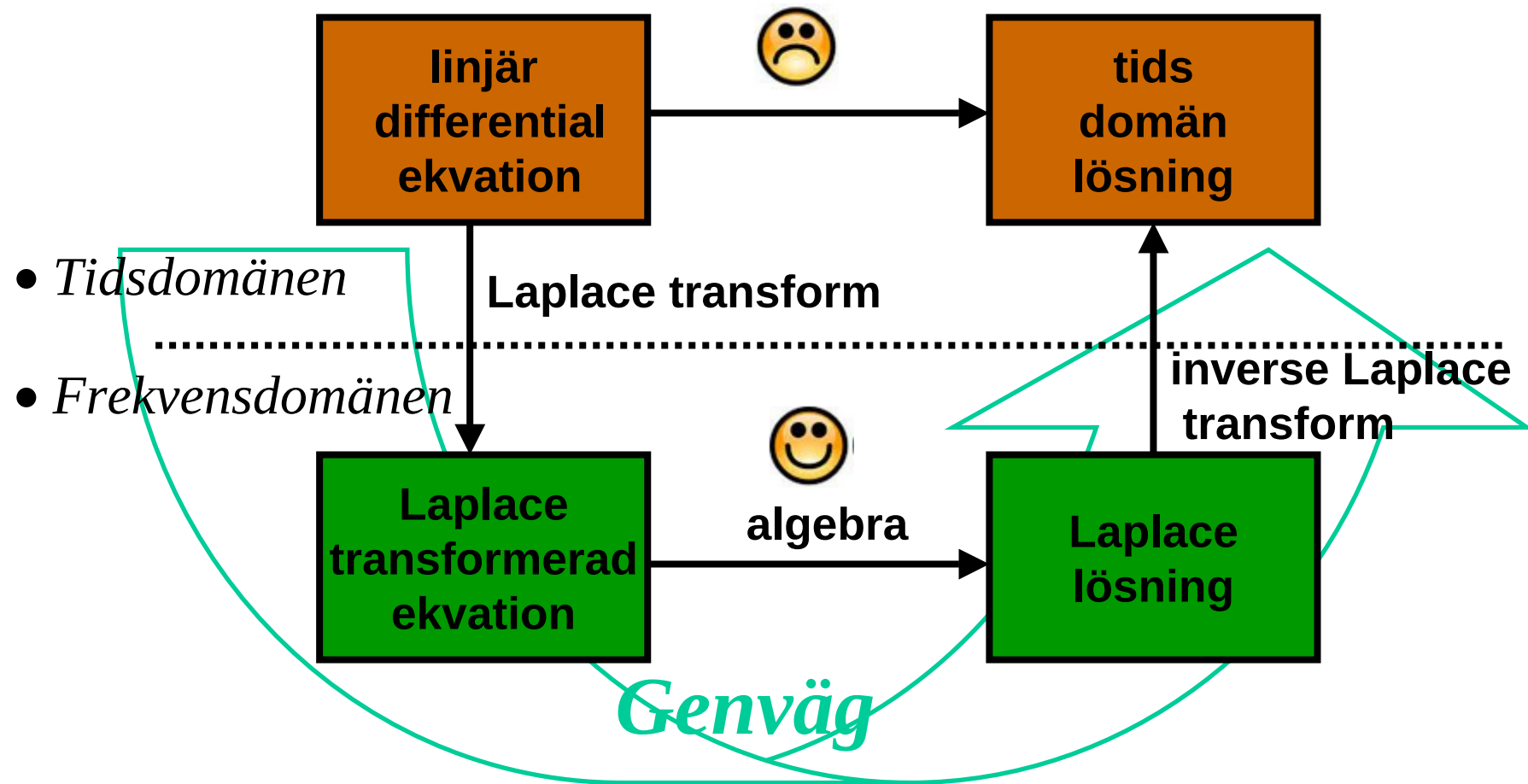
Ex. Laplacetransformtabell



Basic Laplace Transform Pairs

Signal or Function	$f(t)$	$F(s)$
Impulse	$\delta(t)$	1
Step	$u(t) = 1, \quad t \geq 0$	$\frac{1}{s}$
Ramp	$r(t) = t, \quad t \geq 0$	$\frac{1}{s^2}$
Exponential	$e^{-\alpha t} \quad e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{s + \alpha}$
Damped Ramp	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$
Sine	$\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$
Cosine	$\cos(\beta t)$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$
Damped Sine	$e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$
Damped Cosine	$e^{-\alpha t} \cos(\beta t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$
Simple Complex Pole	see next pg	see next pg

Laplacetransformeringsmetoden



William Sandqvist william@kth.se

Dynamik hos processmodeller

- Process med en tidskonstant
- Process med två tidkonstanter
- Process med tre tidkonstanter
- Andra ordningens system med komplexa rötter
- (Processer med både poler och 0-ställen) - senare

Dynamik hos processmodeller

Ex.

$$G = \frac{10}{5s + 1}$$

• Process med *en* tidkonstant

- Stegsvvar

$$\frac{1}{s}$$

- Impulssvar

$$1$$

G

$$\frac{K}{Ts + 1}$$

Y

$$Y = G \cdot U = \frac{K}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

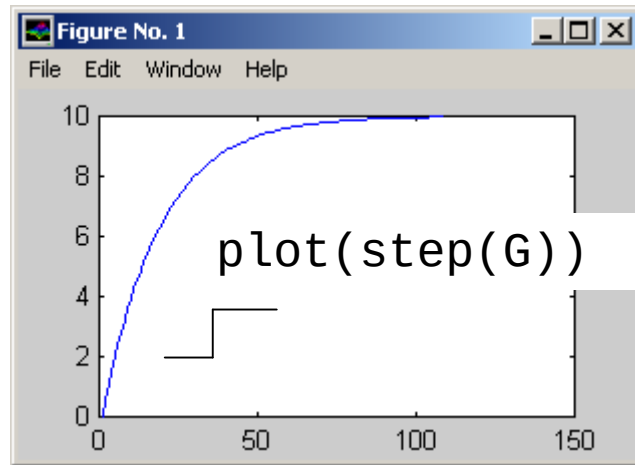
$$Y = G \cdot U = \frac{K}{Ts + 1} \cdot 1$$

Matlab-kommandon

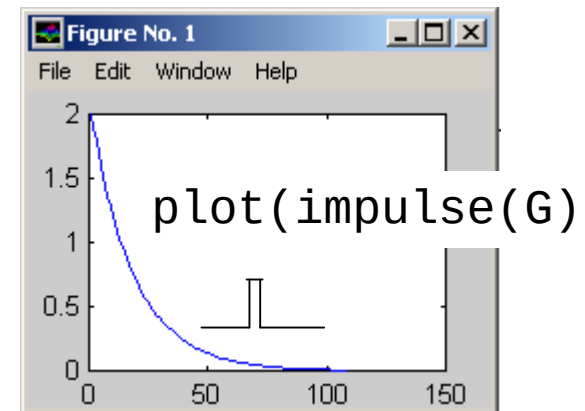
```
G=tf([10],[5,1])
```

```
plot(step(G))
```

```
plot(impulse(G))
```



*Tidsfunktionerna
fås algebraiskt
med Laplacetabell
eller numeriskt
med Matlab*

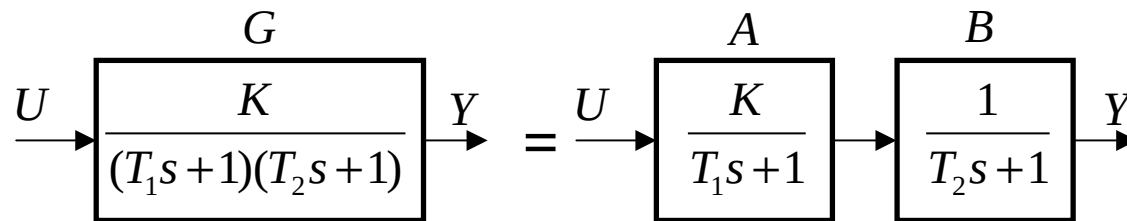


Dynamik hos processmodeller

Ex.

$$G = \frac{10}{(5s+1)(3s+1)}$$

- Process med *två* tidkonstanter



Matlab-kommandon

```
A=tf([10],[5,1]);
B=tf(1,[3,1]);
G=series(A,B);
```

```
» A=tf(10,[5,1])
```

Transfer function:

$$\frac{10}{5s+1}$$

```
» B=tf(1,[3,1])
```

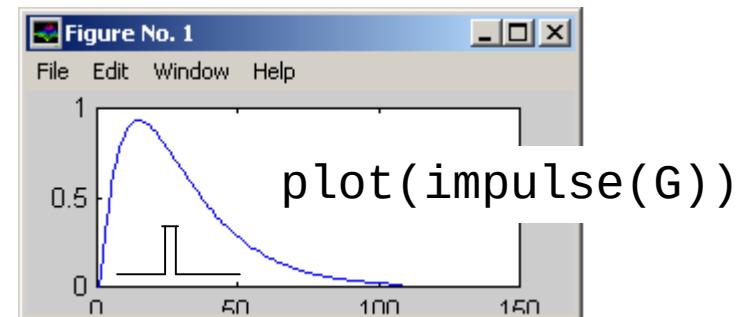
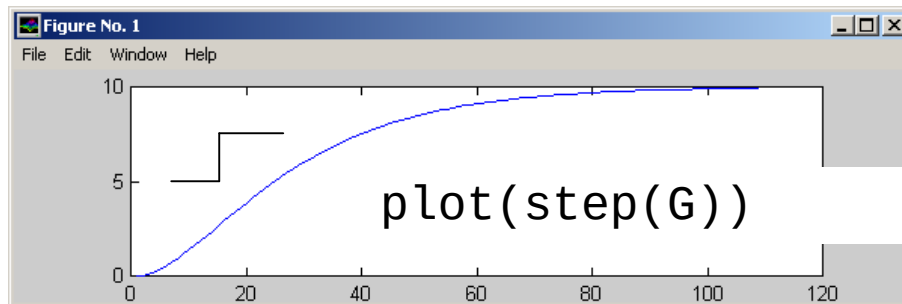
Transfer function:

$$\frac{1}{3s+1}$$

```
» G=series(A,B)
```

Transfer function:

$$\frac{10}{15s^2 + 8s + 1}$$



Dynamik hos processmodeller

Ex.

$$G = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$$

- Process med **komplexa rötter** (ordningstal två)

Om en överföringsfunktions täljare har komplexa rötter så får stegsvaret ”översvängar”. Överföringsfunktionen brukar då anges med **parametrar** ω_0 och ζ .

ω_0 Resonansfrekvens (odämpad)

ζ Dämpfaktor

$w0=1;$

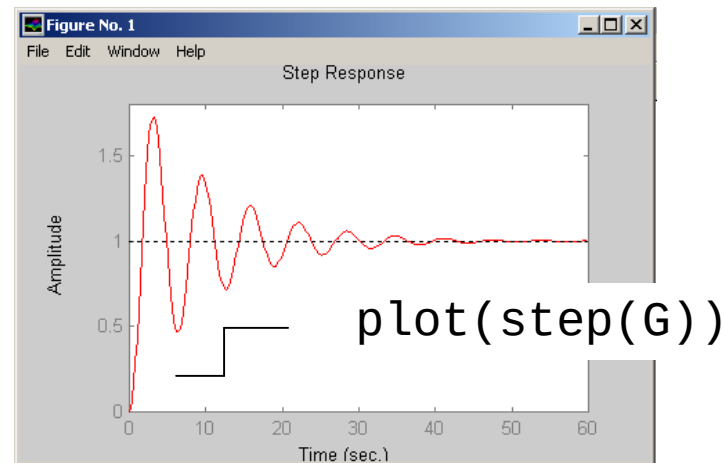
$Z=0.1;$

$[num, den]=ord2(w0, Z);$

$G=tf(num, den)$

$plot(step(G));$

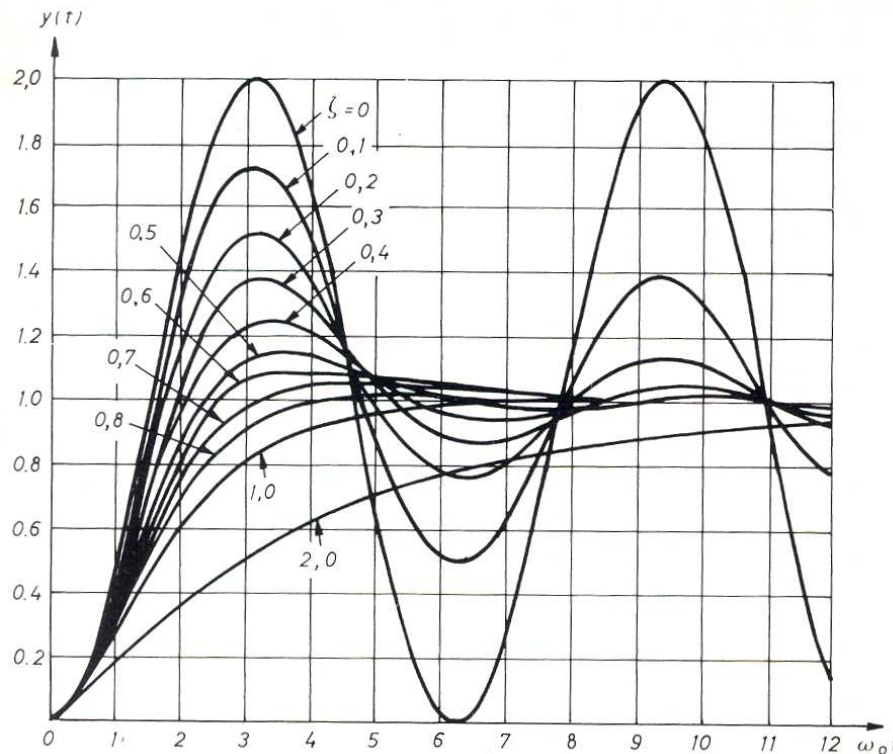
$$G = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}$$



Dynamik hos processmodeller

Ex. $G = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$

- Process med **komplexa rötter** (ordningstal två)



ω_0 Resonansfrekvens
(odämpad)

ζ Dämpfaktor

Dämpfaktor 0 ... 2

$$G = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

William Sandqvist william@kth.se

6.13 Processparametrar

Beskriv processens stegsvar.

Relativa dämpningen ζ . Odämpad egen-svängning ω_0 . Översväng M_p , tid för översväng t_p .

Givet:

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 0,96s + 2} \quad ?$$

Formelsamling (2:a ordningens system med komplexa rötter):

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} \quad M_p = \exp\left[\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right] \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

6.13 lösning Processparametrar

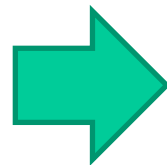
Processens stegsvar. Relativa dämpningen ζ . Odämpad egen-svängning ω_0 . Översväng M_p , tid för översväng t_p .

Givet:

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 0,96s + 2} \quad ?$$

Parametrar för andra ordningens system:

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 0,96s + 2} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$



$$\omega_0^2 = 2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{2}$$

$$K = 1$$

$$2\zeta\omega_0 = 0,96$$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{0,96}{2\sqrt{2}} \approx 0,34$$

6.13 lösning Processparametrar

Formelsamling (2:a ordningens system med komplexa rötter):

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad M_P = \exp\left[\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right] \quad t_P = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$M_P = \exp\left[\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right] =$$

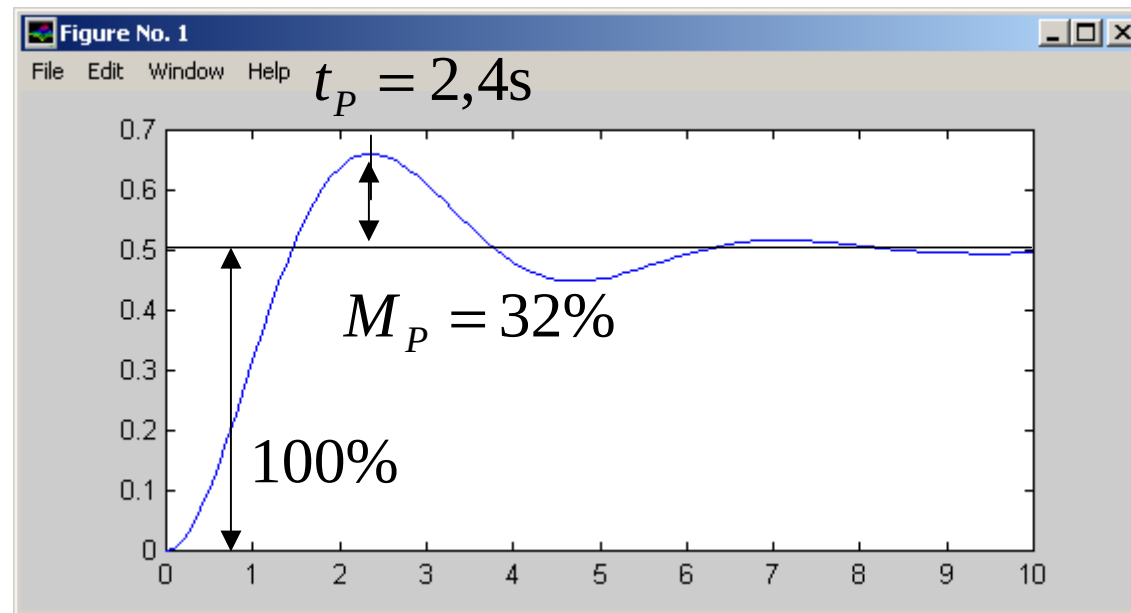
$$= \exp\frac{-0,34 \cdot \pi}{\sqrt{1-0,34^2}} \approx 0,32 \quad 32\%$$

$$t_P = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1-0,34^2}} \approx 2,4s$$

6.13 Process stegsvar MATLAB

```
T=0:0.1:10;  
wn=sqrt(2); Z=0.34;  
[num,den]=ord2(wn,Z);  
G=tf(num,den)  
plot(T,step(G,T));
```



William Sandqvist william@kth.se

6.5 Från diffekv. till överföringsfunktion

- a) $y' + 5y = x$
- b) $y'' + 3y = 4x$
- c) $y'' - 5y' + 6y = x$
- d) $y'' - 3y' + 2y = 3x' + x$
- e) $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y - \dot{x} + 3x = 0$
- f) $4(\ddot{y} + 3\dot{y} + \dot{x}) + 8\ddot{x} = 0$
- g) $\ddot{y} + \dot{y} + 3y = 2\dot{x}$



6.5 **a,b** lösning, överföringsfunktion

a) $y' + 5y = x$

$$L[y' + 5y] = L[x] \Leftrightarrow sY + 5Y = X$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{s + 5}$$

b) $y'' + 3y = 4x$

$$L[y'' + 3y] = L[4x] \Leftrightarrow s^2Y + 3Y = 4X$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{4}{s^2 + 3}$$

6.5 c,d lösning, överföringsfunktion

c) $y'' - 5y' + 6y = x$

$$L[y'' - 5y' + 6y] = L[x] \Leftrightarrow s^2 Y - 5sY + 6Y = X$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{s^2 - 5s + 6}$$

d) $y'' - 3y' + 2y = 3x' + x$

$$L[y'' - 3y' + 2y] = L[3x' + x] \Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{3s + 1}{s^2 - 3s + 2}$$

William Sandqvist william@kth.se

6.6 överföringsfunktion

- a) $y = x + 5 \int x dt + 2 \dot{x}$ PID-regulator
- b) $y = 5x + 3 \int x dt$ PI-regulator
- c) $y(t) = x(t - 5)$ Dödtidsprocess
- d) $y'(t) + y(t) = 2x(t - 10)$ Dödtidsprocess

6.6 a lösning, överföringsfunktion

a) $y = x + 5 \int x dt + 2\dot{x}$ PID-regulator

$$L[y] = L\left[x + 5 \int x dt + 2\dot{x}\right] \Leftrightarrow Y = X + \frac{5}{s}X + 2sX$$

$$\frac{Y}{X} = 1 + \frac{5}{s} + 2s$$

6.6 c lösning, överföringsfunktion

$$\textcircled{\text{c)}} \quad y(t) = x(t - 5)$$

Dödtidsprocess

$$L[y(t)] = L[x(t - 5)] \quad \Leftrightarrow \quad Y = e^{-5s} X \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{Y}{X} = e^{-5s}}$$

William Sandqvist william@kth.se

6.7 från överföringsfunktion till diffekv.

a) $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3 + s}{s^2 + 4s + 1}$

b) $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2e^{-3s}}{5s + 1}$

c) $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = 3 + 4s$

d) $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 4}{2s^2 + 3}$

6.7 a lösn. $G(s)$ till diffekv.

$$\text{a) } G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3+s}{s^2+4s+1}$$

$$s^2Y + 4sY + Y = 3U + sU \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{y} + 4\dot{y} + y = \dot{u} + 3u$$

William Sandqvist william@kth.se

Laplacetransformtabell

$$L[f(t)] \longleftrightarrow L^{-1}[F(s)]$$

Laplacetransform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$ för $t > 0$
1	Impulsfunktion $\delta(t)$
$\frac{1}{s}$	Stegfunktion $\sigma(t)$
$\frac{1}{s^2}$	Rampfunktion t
$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$
$\frac{1}{s(1+as)}$	$\frac{1 - e^{-at}}{a}$
$\frac{1}{s(1+as)(1+bs)}$	$\frac{1 - \frac{a}{b}e^{-at} - \frac{b}{b-a}e^{-bt}}{a-b}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
$\frac{s+a}{(s+b)(s+c)}$	$\frac{(a-b)e^{-bt} - (a-c)e^{-ct}}{c-b}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t \cdot e^{-at}$
$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \cdot \sin at$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^2} [1 - \cos at]$
$\frac{1}{s^2(s^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^3} [at - \sin at]$
$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \cdot \cos bt$
$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \cdot \sin bt$

6.8 stegsvar från överföringsfunktion

a) $G(s) = \frac{1}{s^2 + 16}$

e) $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

b) $G(s) = \frac{3}{s^2 + 9}$

f) $G(s) = \frac{4}{s(s^2 + 4)}$

c) $G(s) = \frac{1}{s+2}$

d) $G(s) = \frac{3}{s}$

6.8 a lösning stegsvar

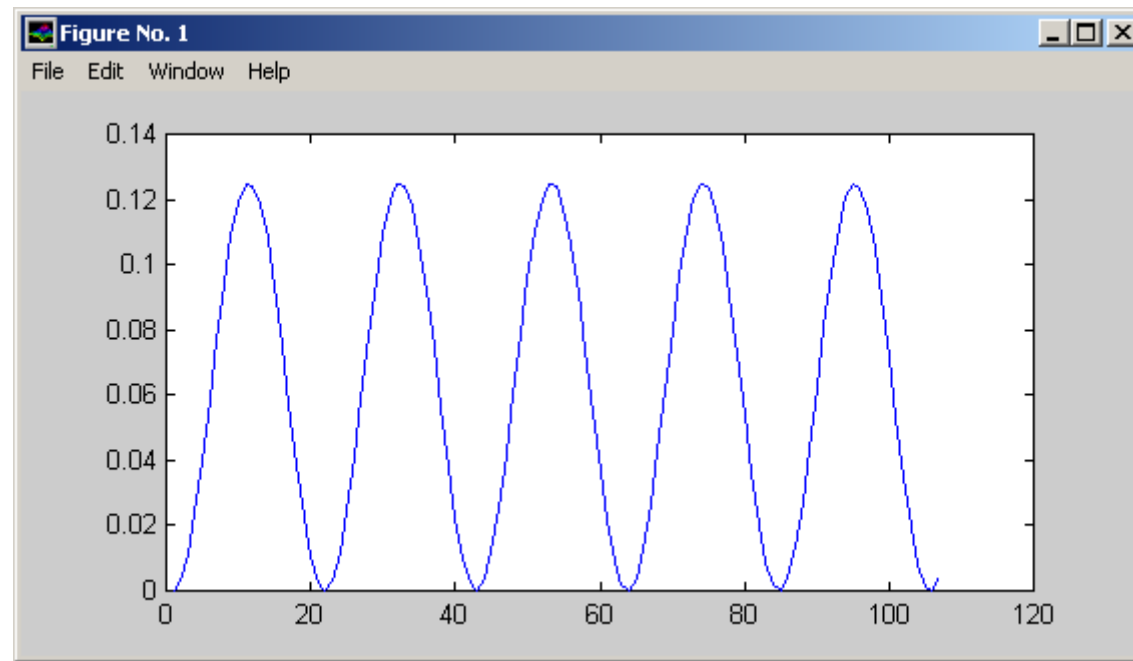
$$\textcircled{a) \quad} G(s) = \frac{1}{s^2 + 16}$$
$$L[\textit{unitstep}] = \frac{1}{s}$$

$F(s)$	$\Leftrightarrow$	$f(t) \quad t > 0$
$\frac{1}{s}$		Stegfunktion $\sigma(t)$
$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$		$\frac{1}{a^2} [1 - \cos at]$

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s^2 + 16)} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{16} (1 - \cos 4t)$$

6.8 a lösning MATLAB

a) $G(s) = \frac{1}{s^2 + 16}$ `G=tf([1],[1,0,16]);`
`plot(step(G));`



6.8 c lösning stegsvar

$$\textcircled{c) } \quad G(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$L[\textit{unitstep}] = \frac{1}{s}$$

$F(s)$	$\Leftrightarrow$	$f(t) \quad t > 0$
$\frac{1}{s}$		Stegfunktion $\sigma(t)$
$\frac{1}{s(1+as)}$		$1 - e^{-\frac{t}{a}}$

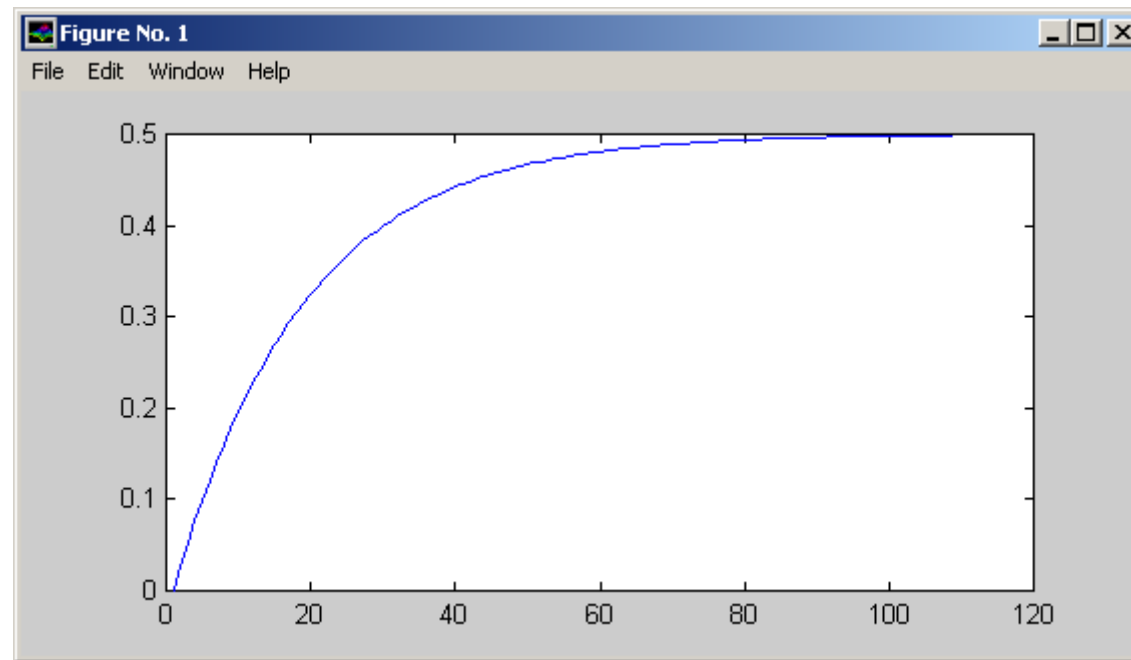
$$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+2)} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(0,5s+1)}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-\frac{t}{0,5}}) = 0,5(1 - e^{-2t})$$

6.8 c lösning MATLAB

c) $G(s) = \frac{1}{s+2}$

```
G=tf([1],[1,2]);  
plot(step(G));
```



6.8 e lösning stegsvar

$$\textcircled{e) \quad} G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$L[\textit{unitstep}] = \frac{1}{s}$$

$F(s)$	$\Leftrightarrow$	$f(t) \quad t > 0$
$\frac{1}{s}$		Stegfunktion $\sigma(t)$
$\frac{1}{s^2}$	?	Rampfunktion t
$\frac{1}{s+a}$		e^{-at}

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s(s+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{s^2(s+1)} \quad ?$$

- Finns ej med i tabellen – då måste man partialbråksuppdelning ...

6.8 e lösning stegsvar

Det kan ha stått så här innan man gjorde allt liknämning!

(ansätt täljarens gradtal ett gradtal lägre än nämnarens)

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{as+b}{s^2} + \frac{c}{s+1}$$
$$\frac{as+b}{s^2} + \frac{c}{s+1} = \frac{(as+b)(s+1) + cs^2}{s^2(s+1)} =$$
$$= \frac{(a+c)s^2 + (a+b)s + b}{s^2(s+1)} \Rightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ a+b=0 \\ b=1 \end{cases} = \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$$

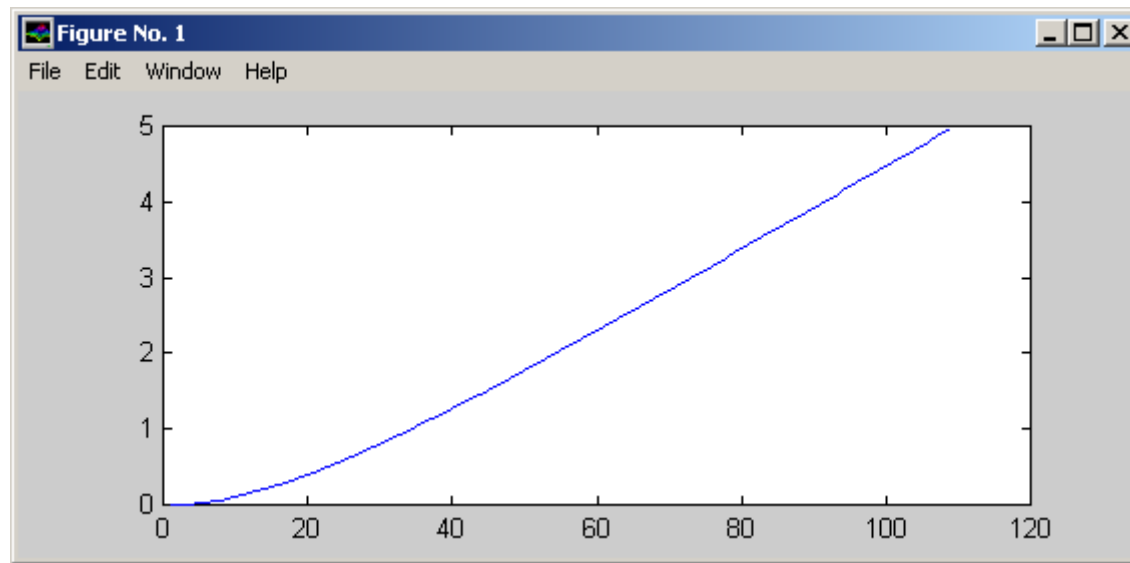
6.8 e lösning stegsvar

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases} = \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \quad \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{-1s+1}{s^2} + \frac{1}{s+1}$$

$$-\frac{\cancel{s}}{s^{\cancel{2}}} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} \Rightarrow \boxed{y(t) = -1 + t + e^{-t}}$$

6.8 e lösning MATLAB

e) $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ `G=tf([1],[1, 1, 0]);`
`plot(step(G));`



$$y(t) = -1 + t + e^{-t}$$

William Sandqvist william@kth.se

6.12 Partialbråksuppdelning

a) $G(s) = \frac{9-3s}{(s+1)(s+7)}$

e) $G(s) = \frac{s^2 + 4s + 5}{s^3 + 2s^2 + 3s + 2}$

b) $G(s) = \frac{4s+2}{s(s+1)(s+2)}$

f) $G(s) = \frac{5s+12}{s^2 + 5s + 6}$

c) $G(s) = \frac{4s^2 + 7s + 4}{(s+2)(s^2 + s + 1)}$

d) $G(s) = \frac{3s^2 - 2s + 1}{(s-3)(s-2)(s-1)}$

6.12 a lösn. metod Handpåläggning

a) $G(s) = \frac{9-3s}{(s+1)(s+7)}$

$$\frac{9-3s}{(s+1)(s+7)} = \frac{\frac{9-3(-1)}{(-1)+7}}{s+1} + \frac{\frac{9-3(-7)}{(-7)+1}}{s+7}$$

$\uparrow$
 $s = -1$
 $\Rightarrow 0$

$\uparrow$
 $s = -7$
 $\Rightarrow 0$

$$G(s) = \frac{\frac{12}{6}}{s+1} + \frac{\quad}{s+7} = \frac{2}{s+1} + \frac{\quad}{s+7}$$

6.12 a lösn. metod Handpåläggning

$$\text{a) } G(s) = \frac{9-3s}{(s+1)(s+7)}$$

$$\frac{9-3s}{(s+1)(s+7)} \Rightarrow \frac{9-3(-1)}{(-1)+7} + \frac{9-3(-7)}{(-7)+1}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline s = -1 \\ \Rightarrow 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline s = -7 \\ \Rightarrow 0 \\ \hline \end{array}$$

$$G(s) = \frac{\frac{12}{6}}{s+1} + \frac{\frac{30}{6}}{s+7} = \frac{2}{s+1} + \frac{5}{s+7}$$

6.12 a lösn. metod Handpåläggning

$$\text{a) } G(s) = \frac{9-3s}{(s+1)(s+7)}$$

$$\frac{9-3s}{(s+1)(s+7)} = \frac{\frac{9-3(-1)}{(-1)+7}}{s+1} + \frac{\frac{9-3(-7)}{(-7)+1}}{s+7}$$

$$G(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{5}{s+7}$$

William Sandqvist william@kth.se

6.9 Impulssvar från överföringsfunktion

a) $G(s) = \frac{2}{s^2 + 5s + 6}$

b) $G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 4}$

c) $G(s) = \frac{3}{s+1}$

d) $G(s) = \frac{2}{s(1+5s)}$

6.9 a lösning impulssvar

$$\textcircled{a) } G(s) = \frac{2}{s^2 + 5s + 6}$$

$$L[\text{impulse}] = 1$$

$$s^2 + 5s + 6 \quad p, q\text{-formeln}$$

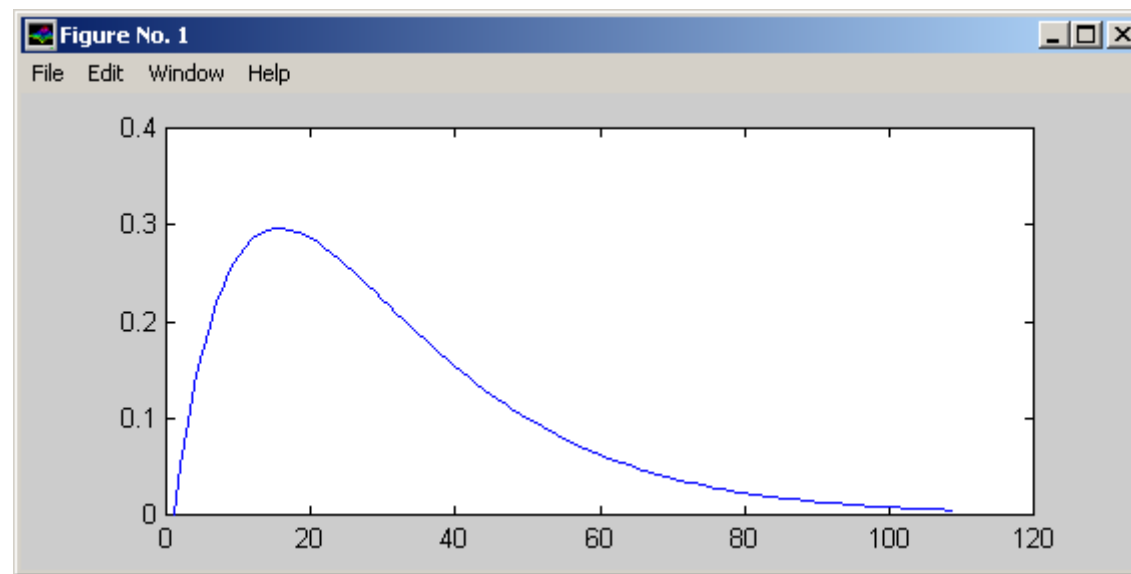
$$s = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} \quad s_1 = -2 \quad s_2 = -3$$

$$G(s) = \frac{2}{(s+2)(s+3)} \Rightarrow y(t) = 2(e^{-2t} - e^{-3t})$$

$$\begin{array}{ccc} F(s) & \Leftrightarrow & f(t) \quad t > 0 \\ \frac{1}{(s+a)(s+b)} & & \left| \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a} \right. \end{array}$$

6.9 a lösning MATLAB

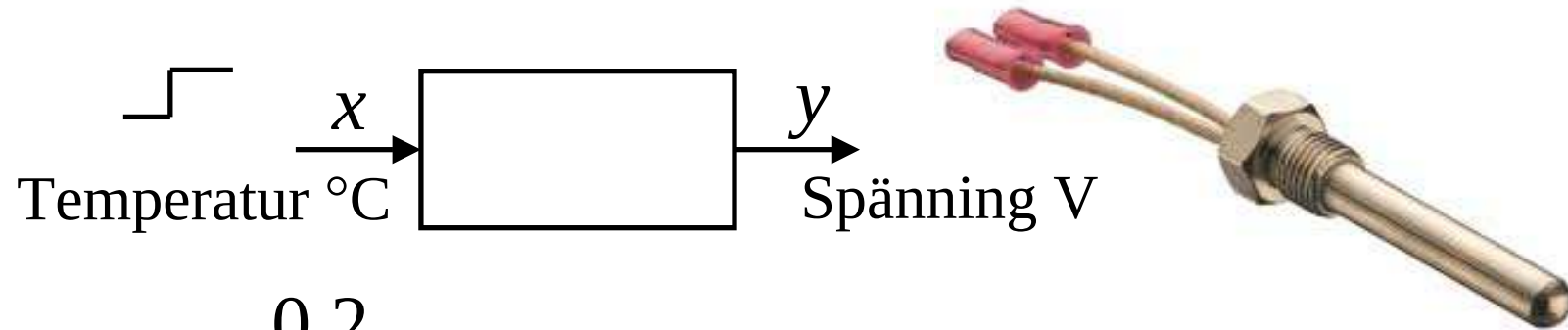
a) $G(s) = \frac{2}{s^2 + 5s + 6}$ `G=tf([2],[1, 5, 6]);`
`plot(impz(G));`



$$y(t) = 2(e^{-2t} - e^{-3t})$$

William Sandqvist william@kth.se

6.10 stegsvar från tempsensor



$$G(s) = \frac{0,2}{10s + 1}$$

Rita stegsvaret?

6.10 lösning, stegsvar



$$G(s) = \frac{0,2}{10s + 1}$$

$$L[\text{unitstep}] = \frac{1}{s}$$

$$\begin{array}{ccc} F(s) & \Leftrightarrow & f(t) \quad t > 0 \\ \frac{1}{s(1+as)} & & \left| \quad 1 - e^{-\frac{t}{a}} \right. \end{array}$$

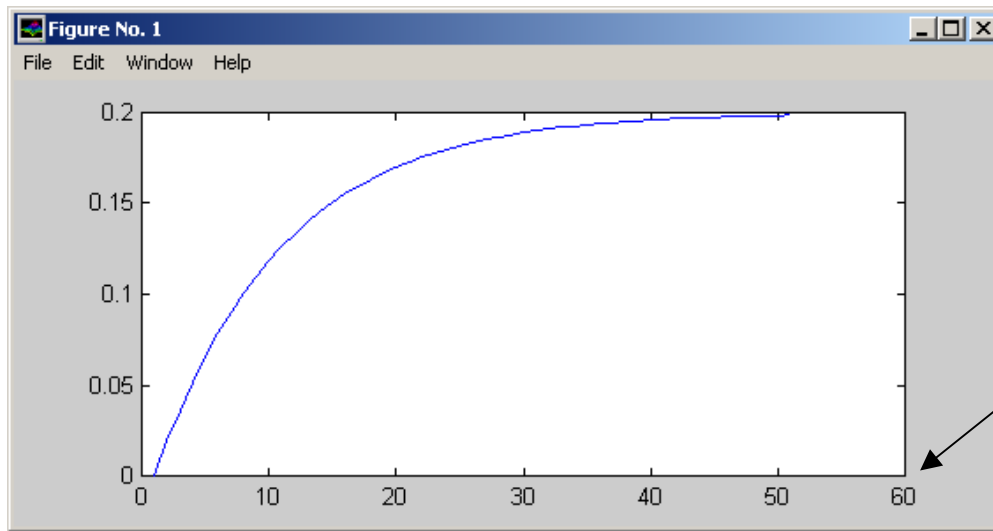
$$\frac{1}{s} \cdot \frac{0,2}{10s + 1} \Rightarrow$$

$$y(t) = 0,2(1 - e^{-\frac{t}{10}})$$

6.10 lösning, MATLAB

$$G(s) = \frac{0,2}{10s + 1}$$

```
T= 0:1:50; % 0...50 sek  
G=tf([0.2],[10, 1]);  
plot(T,step(G,T));
```



Vi har skickat med
en tidvektor T, nu
stämmer tidskalan.

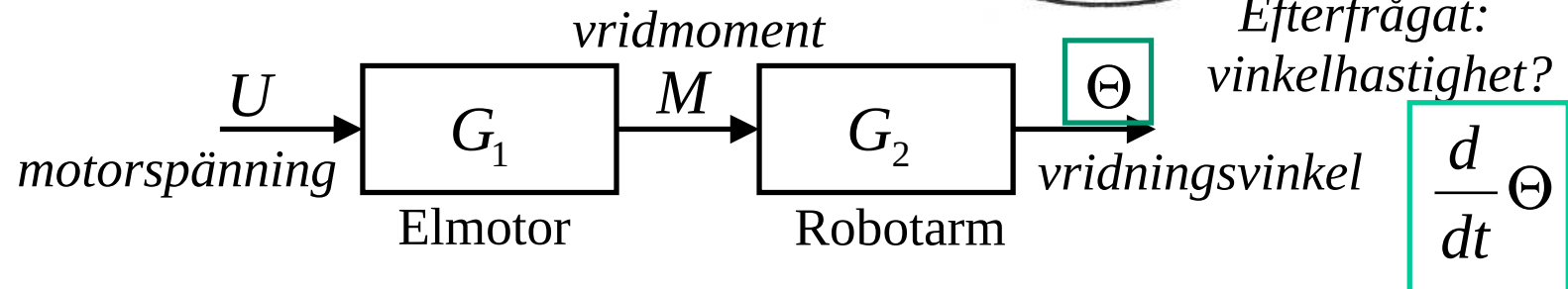
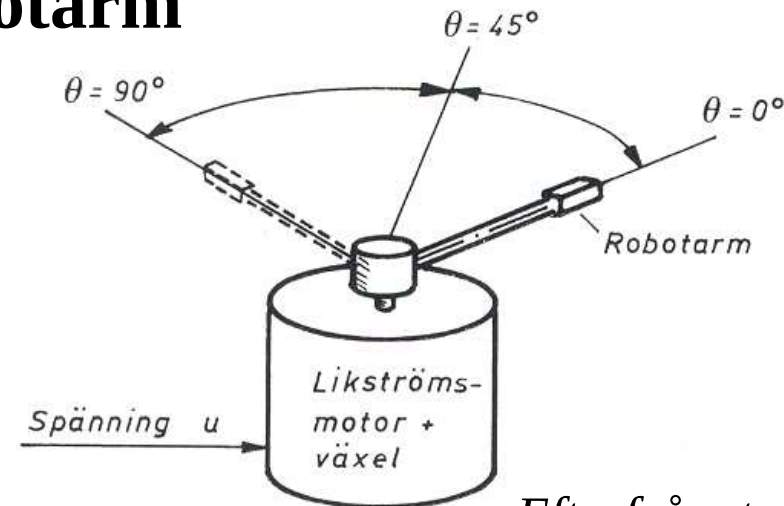
$$y(t) = 0,2(1 - e^{-\frac{t}{10}})$$

William Sandqvist william@kth.se

6.4 Robotarm

$$G_1 \left(\frac{M[\text{Nm}]}{U[\text{V}]} \right) = \frac{3}{1 + T_f s}$$

$$G_2 \left(\frac{\Theta[\text{rad}]}{M[\text{Nm}]} \right) = \frac{1}{Js^2 + bs}$$



Vad blir robotarmens sluthastighet i sorten **varv/minut** [rpm] om ett spänningssprång $U = 6$ [V] läggs på motorn?

Använd slutvärdessatsen. Robotarmens tröghetsmoment $J = 0,45$ [kgm²].

Luftmotståndet $b = 1,3$ [Nm/rad]. Motorns tidkonstant $T_f = 0,7$ [s].

6.4 Robotarm lösning

slutvärdessatsen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

- tidsderivata

$$\frac{d}{dt} \Theta(t) = s \cdot \Theta(s) \Rightarrow G\left(\frac{\dot{\Theta}[\text{rad/sek}]}{U[\text{V}]}\right) = s \cdot G_1 G_2$$

- stegändring

$$U(s) = \frac{6}{s}$$

Sökt vinkelhastighet

$$\dot{\Theta}(s) = U(s) \cdot G = \frac{6}{s} \cdot \cancel{s} \cdot \frac{3}{(1 + T_f s)} \cdot \frac{1}{(Js^2 + bs)}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\Theta}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \dot{\Theta}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \cdot \frac{18}{(1 + T_f s) \cancel{s} (b + Js)} = \frac{18}{b}$$

$$\frac{18}{b} = \frac{18}{1,3} [\text{rad/s}] = \frac{18}{1,3} \cdot \frac{60}{2\pi} [\text{rpm}] = 130 [\text{rpm}]$$

6.4 robotarm - MATLAB

D = s	G1= $\frac{3}{0.7 s + 1}$	G2= $\frac{1}{0.45 s^2 + 1.3 s}$
--------------	----------------------------------	---

```
T=0.7; b=1.3; J=0.45;
```

```
D=tf([1, 0],[0, 1])
```

```
G1=tf([3],[T, 1])
```

```
G2=tf([1],[J, b, 0])
```

```
G=series(D, G1)
```

```
G=series(G, G2)
```

Spänningssprång 6V
och omvandling mellan
rad/s till varv/s

```
plot( ( 6*60/(2*pi) ) * step(G) );
```

6.4 robotarm - MATLAB

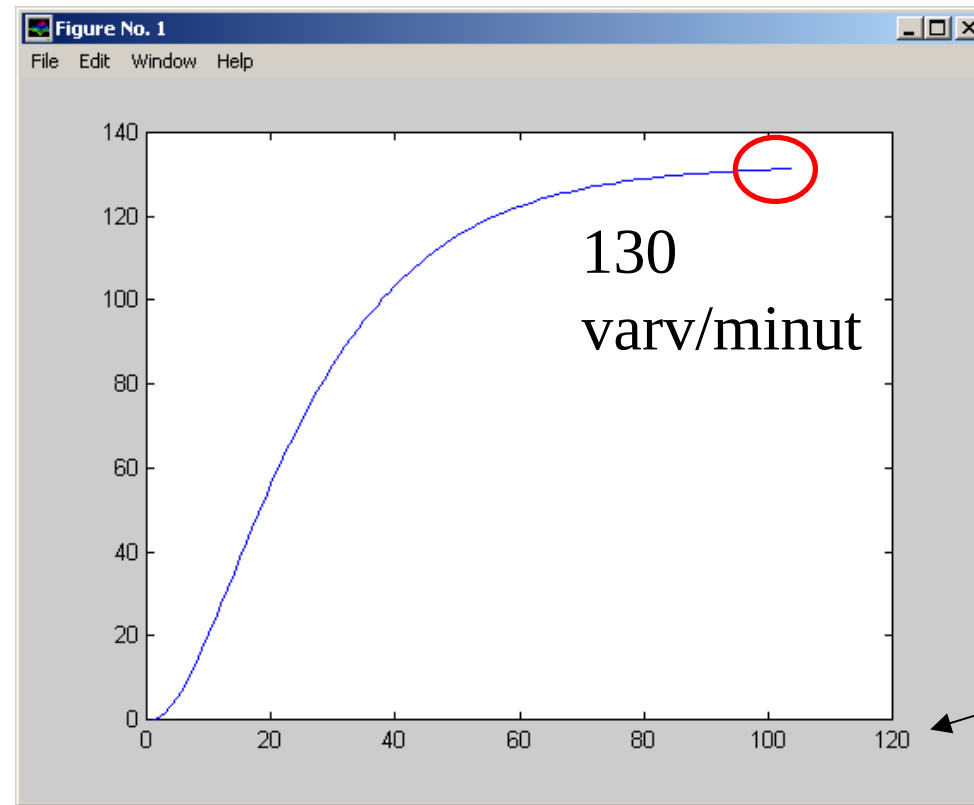
$$G\left(\frac{\dot{\Theta}[\text{rad/sek}]}{U[\text{V}]}\right) = s \cdot G_1 G_2$$

MATLAB `series()` beräknar den totala överföringsfunktionen.

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{3 \ s}}{\mathbf{0.315 \ s^3 + 1.36 \ s^2 + 1.3 \ s}}$$

6.4 robotarm - MATLAB

Spännings-
språng 6V

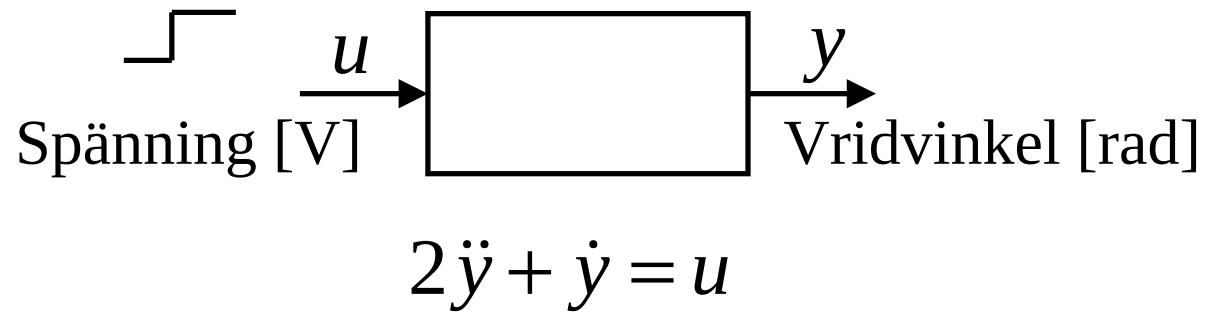


Inte tid
direkt, utan
samplens
nummer

```
plot( ( 6*60/(2*pi) ) * step(G) );
```

William Sandqvist william@kth.se

6.11 stegsvar från robotarm



Rita stegsvaret?

6.11 lösning, stegsvar



Överföringsfunktion:

$$2\ddot{y} + \dot{y} = u \quad \Leftrightarrow \quad L[2\ddot{y} + \dot{y}] = L[u]$$

$$2s^2Y + sY = U \quad \frac{Y}{U} = \frac{1}{2s^2 + s}$$

Stegsvar: $L[\text{unitstep}] = \frac{1}{s}$

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{2s^2 + s} = \frac{1}{s^2(2s + 1)}$$

? Finns inte i transformtabellen!

6.11 lösning, stegsvar



Partialbråksuppdelning:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^2(2s+1)} &= \frac{as+b}{s^2} + \frac{c}{2s+1} = \\ &= \frac{(as+b)(2s+1) + cs^2}{s^2(2s+1)} = \frac{(2a+c)s^2 + (a+2b)s + b}{s^2(2s+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2a+c=0 \\ a+2b=0 \\ b=1 \end{cases} = \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow \frac{-2s+1}{s^2} + \frac{4}{2s+1}$$

6.11 lösning, stegsvar



$$\begin{aligned} \frac{-2s+1}{s^2} + \frac{4}{2s+1} &= \\ &= \frac{-2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+0,5} \end{aligned}$$

$$F(s) \Leftrightarrow f(t) \quad t > 0$$

$$\frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s^2}$$

$$\frac{1}{s+a}$$

Stegfunktion $\sigma(t)$

Rampfunktion t

$$e^{-at}$$

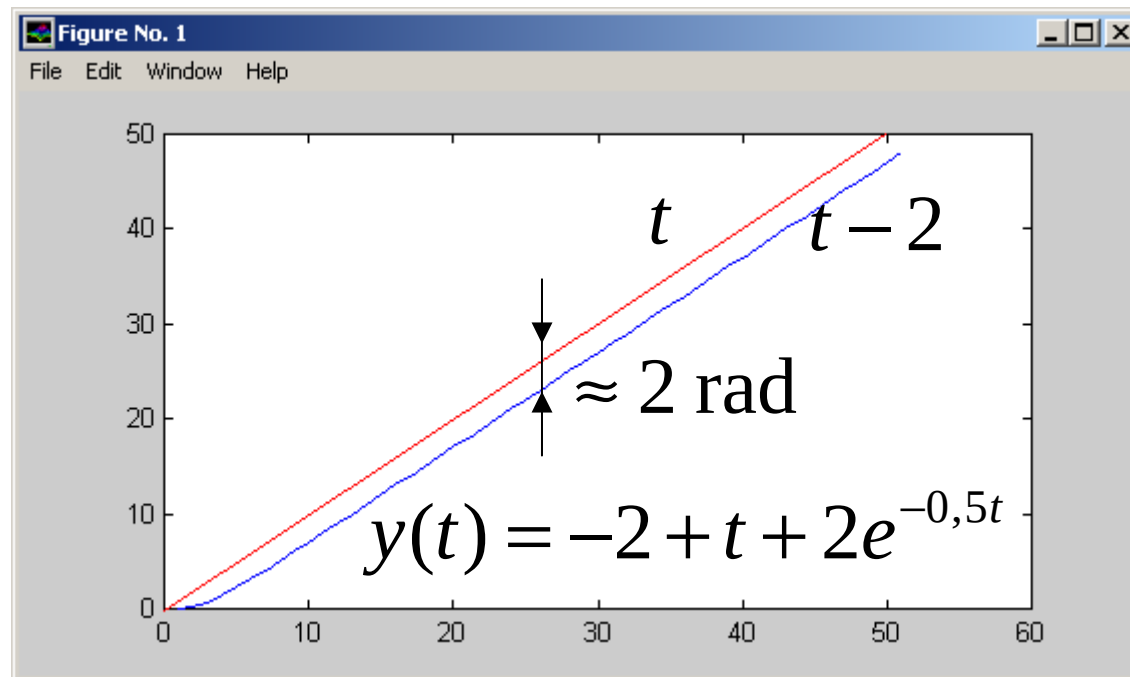
$$y(t) = -2 + t + 2e^{-0,5t}$$

6.11 lösning, MATLAB



$$G = \frac{1}{2s^2 + s}$$

```
T= 0:1:50; % 0...50 sek  
G=tf([1],[2, 1, 0]);  
plot(T,step(G,T));
```

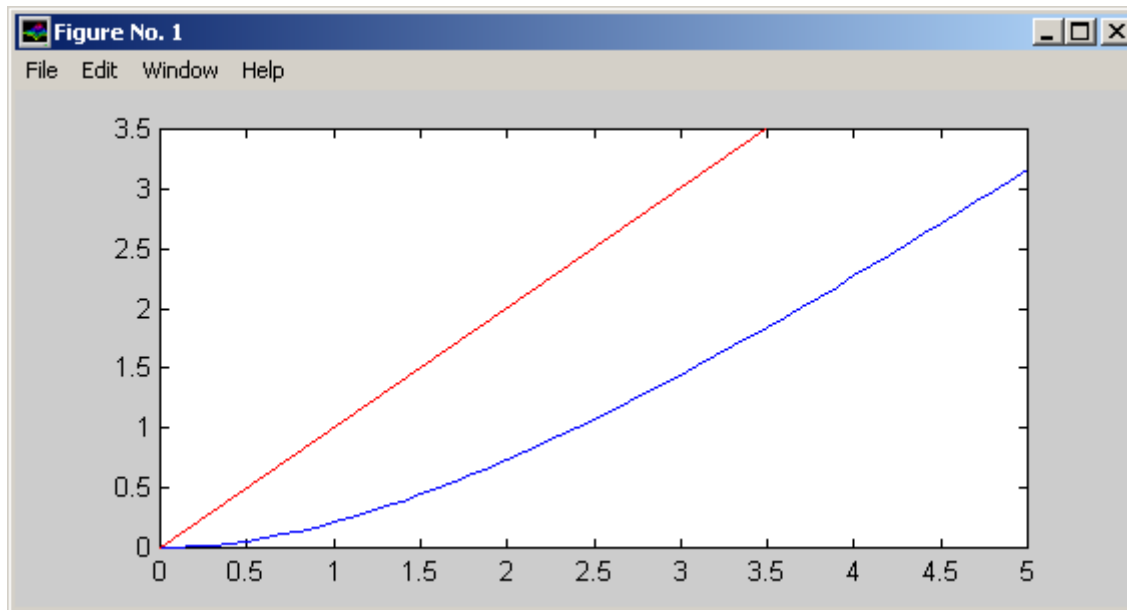


6.11 MATLAB förstoring



$$G = \frac{1}{2s^2 + s}$$

```
T= 0:0.1:5;  
G=tf([1],[2, 1, 0]);  
plot(T,step(G,T));
```



Det robotarmen missar i starten tar den aldrig igen – det kan vi kanske förbättra senare i kursen! (med ett reglersystem).

William Sandqvist william@kth.se

6.14 Diffekv. poler/0-ställen

- a) $y''+9y'+14y = 3u$
- b) $\ddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 14y = \dot{u} + 4u$
- c) $y''+4y'+3y = u'+u$

- 1) Överföringsfunktioner
- 2) Poler och 0-ställen
- 3) Statisk förstärkning
- 4) Tidkonstanter

6.14 a lösn. Diffekv. poler/0-ställen

a) $y'' + 9y' + 14y = 3u$

$$y'' + 9y' + 14y = 3u \quad \Leftrightarrow \quad s^2 Y + 9sY + 14Y = 3U$$

$$G(s) = \frac{3}{s^2 + 9s + 14} \quad s = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 14}$$

Poler:
 $s_1 = -2 \quad s_2 = -7$

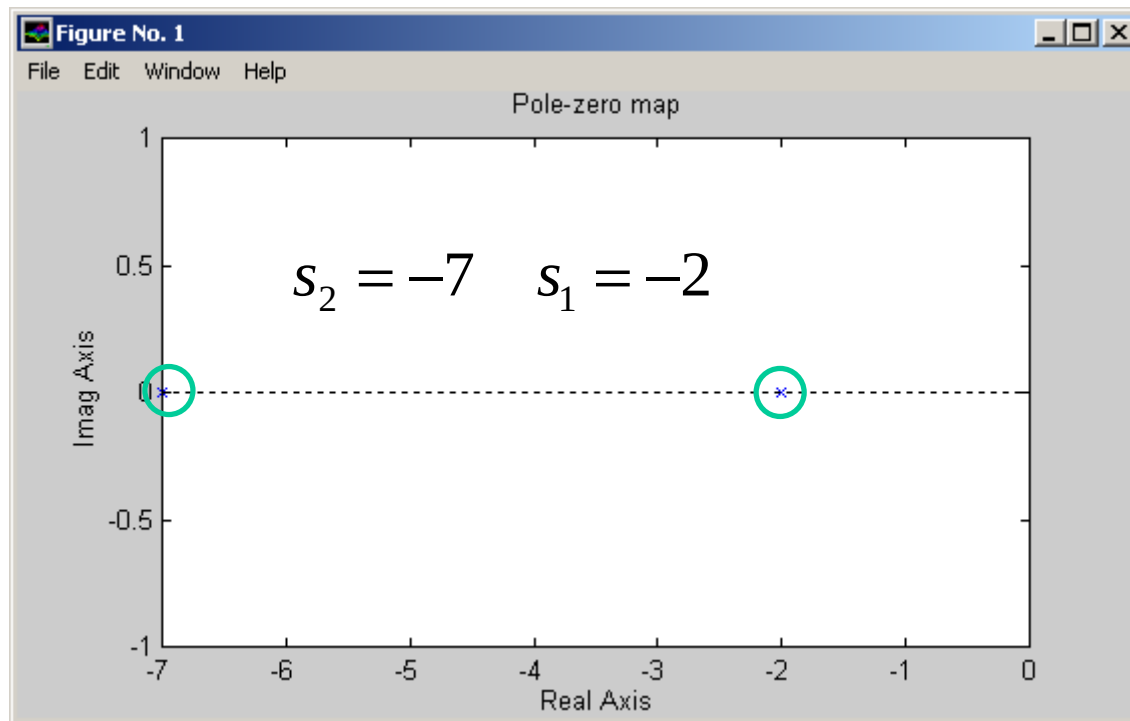
$$G(s) = \frac{3}{(s+2)(s+7)} = \frac{\boxed{3}}{\boxed{2 \cdot 7} \left(1 + \boxed{\frac{1}{2}}s\right) \left(1 + \boxed{\frac{1}{7}}s\right)}$$

$$\text{Gain} = G(s \rightarrow 0) = \frac{3}{2 \cdot 7} \approx 0,21 \quad \tau_1 = 0,5 \quad \tau_2 = 0,15$$

6.14 a lösn. poler/0-ställen MATLAB

$$G(s) = \frac{3}{s^2 + 9s + 14}$$

```
G=tf([3],[1,9,14]);  
pzmap(G);
```



William Sandqvist william@kth.se

William Sandqvist william@kth.se