

SF1669 Matematisk och numerisk analys II

Andra föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

21 januari 2015

Repetition

- ▶ Operationer på \mathbb{R}^n från linjär algebra
- ▶ Avstånd ges av $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.
- ▶ Öppet klot med radie r och centrum i \mathbf{a}

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$$

- ▶ Inre punkter, yttre punkter och randpunkter till mängder
- ▶ Öppna mängder, slutna mängder, begränsade mängder och kompakta mängder
- ▶ **polära koordinater** $[r, \theta]$ $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$
- ▶ **cylindriska koordinater** $[r, \theta, z]$ $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$
- ▶ **sfäriska koordinater** $[r, \theta, \phi]$
 $(x, y, z) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi)$

Vektorvärda funktioner i en variabel

Om vi vill se på en partikels position beroende på tiden har vi **positionsvektorn**

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Om funktionerna $x(t)$, $y(t)$ och $z(t)$ är deriverbara får vi **hastighetsvektorn** som

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}.$$

Farten ges då av $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|$ och **accelerationen** av

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$$

om $x(t)$, $y(t)$ och $z(t)$ är två gånger deriverbara.

Parametriserade kurvor

Om $\mathbf{r}(t)$ är deriverbar på intervallet $a \leq t \leq b$ ger det en **parametrisering** av kurvan C som består av punkterna $\mathbf{r}(t)$ där $a \leq t \leq b$.

Exempel

$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ är en parametrisering av enhetscirkeln, där $0 \leq t \leq 2\pi$.

Exempel

$\mathbf{r}(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ är en annan parametrisering av enhetscirkeln, där $0 \leq t \leq \pi$.

Exempel

$\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$ är en parametrisering av parabeln $y = x^2$, där $-\infty \leq t \leq \infty$.

Båglängd

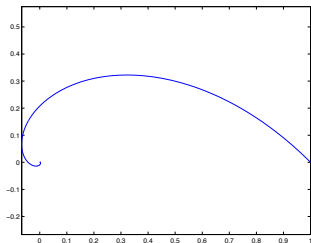
Sats

Om $r'(t)$ är kontinuerlig kan vi beräkna **båglängden** av kurvan C som parametriseras av $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ som

$$\int_a^b |r'(t)| dt = \int_a^b v(t) dt.$$

Fråga

Hur lång är spiralen som ges av
 $\mathbf{r}(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t)$,
 $t \geq 0$?



Kurvor som skärning mellan ytor

Parametrisera kurvan som ges av skärningen av planet $z = x + y$ med cylindern $x^2 + y^2 = 1$.

