

Gränsvärden och kontinuitet

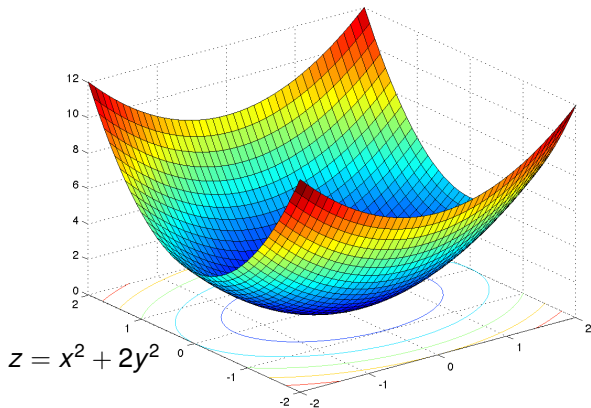
Olof Runborg

Numerisk analys, Matematik, KTH

SF1669, VT 2015

Funktioner av flera variabler

- $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tilldelar ett unikt värde för varje punkt (x_1, x_2, \dots, x_n) i **definitionsområdet** $\subset \mathbb{R}^n$
- **Värdemängden** utgör alla de värden f antar.



Visualisering
(två variabler):

- **grafen**
(yta i \mathbb{R}^3)
- **nivåkurvor**
(kurvor i \mathbb{R}^2)

Definition gränsvärde

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L,$$

om det för alla $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ så att

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon, \quad \text{när} \quad 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta.$$

"f(x,y) kommer godtyckligt nära L, om (x,y) ligger tillräckligt nära (a,b)"

Definition kontinuitet

$f(x,y)$ kontinuerlig i (a,b) om

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

"Funktionsvärdet ska vara samma som gränsvärdet"

Räkneeregler, gränsvärden

1 Summa, differens

$$\lim(f \pm g) = \lim f \pm \lim g$$

2 Produkt

$$\lim(f \times g) = \lim f \times \lim g$$

3 Kvot

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g} \quad (\lim g \neq 0)$$

4 Sammansättning

$$\lim f(x, y) = M \quad \Rightarrow \quad \lim F(f(x, y)) = \lim_{t \rightarrow M} F(t)$$

5 Instängning

$$g \leq f \leq h \quad \text{och} \quad \lim g = \lim h, \\ \Rightarrow \lim f = \lim g = \lim h.$$

6 Icke-existens

Om gränsvärdet längs olika vägar skiljer sig, eller $\rightarrow \infty$.