SF1669 Matematisk och numerisk analys II

Sjätte föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

29 januari 2015

Repetition

Kedjeregeln säger att Jacobimatrisen av sammansättningen $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ är produkten av Jacobimatriserna

$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(x, y) = (D\mathbf{f}(g(x, y)))(D\mathbf{g}(x, y)).$$

Speciellt, om g är ett variabelybyte i två variabler, $(u, v) = g(x, y)$, säger kedjeregeln att

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Exempel från tentamen

Uppgift (från tentamen 2015-01-12)

De två vektorvärda funktionerna **f** och **g** ges av

$$\mathbf{f}(x, y) = (x \cos y, x \sin y) \quad \text{och} \quad \mathbf{g}(x, y) = (xy, x^2 - y^2)$$

för alla (x, y) i $\mathbb{R}^2$.

A. Beräkna Jacobimatriserna $D\mathbf{f}(x, y)$ och $D\mathbf{g}(x, y)$. **(2)**

B. Jacobimatrisen för sammansättningen $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ kan fås genom en matrismultiplikation. Illustrera detta genom att beräkna Jacobimatrisen $D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(x, y)$. **(2)**

Repetition

Linjär approximation, eller linjarisering, ges av

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx F(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

Vid felanalys får vi

$$\epsilon_z \approx \epsilon_x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \epsilon_y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

om $z = f(x,y)$ med felgränser

$$E_z \approx E_x \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + E_y \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|.$$

Exempel från tentamen

Uppgift (från tentamen 2015-01-12)

Använd en linjarisering kring punkten $(x_0\,, y_0) = (1\,, 2)$ för att approximera värdet av funktionen $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ i punkten $(1{,}2\,,\ 2{,}1)$. **(4)**

Gradient

Definition

Gradienten till en differentierbar funktion $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ i punkten **a** är vektorn

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right).$$

Symbolen ∇ kallas nabla.

Obs!

Den linjära approximationen kring **a** kan skrivas

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

eller

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \approx f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}.$$

Vektorfält

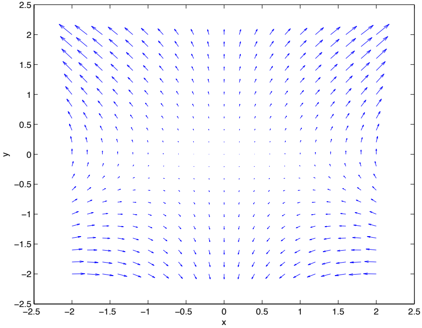
Gradienten till $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ ger ett vektorfält i $\mathbb{R}^n$, dvs en funktion $\nabla f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Exempel

$$f(x, y) = x^2y + y^2$$

ger

$$\nabla f(x, y) = (2xy, x^2+2y).$$



Obs!

I Matlab kan man se på vektorfält med `quiver`.

Riktningsderivata

Definition

Riktningsderivatan av $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ i riktningen $\mathbf{v}$ i punkten $\mathbf{a}$ ges av

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$$

om $|\mathbf{v}| = 1$.

Sats

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$$

om $|\mathbf{v}| = 1$ *och* $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ *är differentierbar.*

$\nabla f(\mathbf{a})$ pekar åt det håll där riktningsderivatan är störst.

riktningsderivatan är noll ortogonalt mot $\nabla f(\mathbf{a})$

Riktningsderivata

Fråga

Vad är riktningsderivatan för $f(x, y) = x^2y + y^2$ *i punkten* $(1, 2)$ *och riktningen* $(-1, 1)$*?*

A. $9/\sqrt{2}$

B. $-9/\sqrt{2}$

C. 9

D. -9

E. $1/\sqrt{2}$

F. $-1/\sqrt{2}$

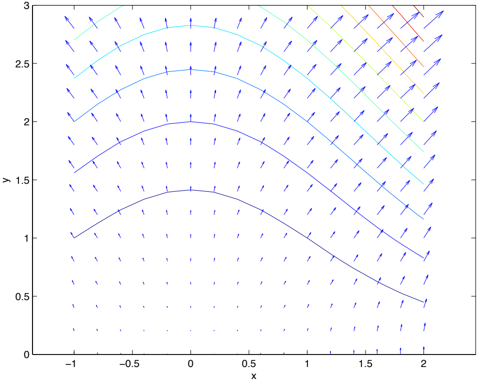
G. 1

H. -1

Gradienten och nivåkurvor

Sats

Om $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar är $\nabla f(x)$ ortogonal mot nivåkurvorna till f.



Figur : Gradient och nivåkurvor för $f(x,y) = x^2y + y^2$

Egenskap hos gradienten

Från oberoendet av ordningen hos de partiella derivatorna får vi

Sats

Om $F(x,y) = \nabla f = (P(x,y), Q(x,y))$ har kontinuerliga derivator så gäller

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Fråga

Vilka av följande vektorfält kan vara gradient till någon funktion?

A. $F(x,y) = (2x + y, x + 2y)$

B. $F(x,y) = (2xy + y, x + 2y^2)$

C. $F(x,y) = (2x + y, x + 2)$

D. $F(x,y) = (\sin(xy), \cos(yx))$