SF1669 Matematisk och numerisk analys II

Åttonde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

3 februari 2015

Repetition

- Jacobianen för en funktion $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ är determinanten av Jacobimatrisen.

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \det D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right).$$

- Om Jacobianen är nollskild är funktionen lokalt inverterbar.
- En ekvation $g(x, y) = 0$ kan definiera y som en funktion av x om $g'_y \neq 0$. Då är $y = f(x)$ implicit definierad av ekvationen.
- Om vi har ett ekvationssystem med n ekvationer och $m + n$ variabler, kan vi lösa ut n av dem som funktioner av de övriga om en deldeterminant av Jacobimatrisen är skild från noll.

Taylors formel

Om funktionen tillhör $\mathcal{C}^2(D)$ kan vi förfina den linjära approximationen till en approximation med ett andragradspolynom

$$f(x,y) \approx f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-a) + A(x-a)^2 + B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2 \quad (1)$$

där vi får koefficienterna av andra ordningens partiella derivator

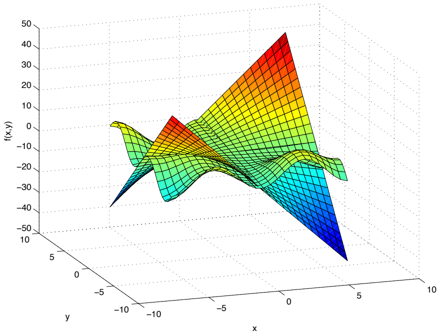
$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Polynomet i högerledet i (1) kallas andra ordningens Taylorpolynom för f kring punkten (a,b).

Taylorpolynom

Fråga

Vilket Taylorpolynom är korrekt för $f(x, y) = x\sin(y) + y\cos(x)$ *i punkten* $(x, y) = (0, 0)$*?*



A. $1 + x + y^2$

B. $y + xy$

C. $x + xy + y^2$

D. $x + y + x^2 + xy$.

Taylors formel med restterm

Med en noggrannare analys kan man se hur bra approximationen blir.

Sats

Om f ligger i $\mathcal{C}^3(D)$ och (a, b) är en inre punkt i D är

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k$$

$$+\frac{1}{2}(f''_{xx}(x_0, y_0)h^2+2f''_{xy}(x_0, y_0)hk+f''_{yy}(x_0, y_0)k^2)+|(h, k)|^3B(h, k)$$

där $B(h, k)$ är begränsad i en öppen cirkelskiva kring origo.

Idé till bevis.

Använd vanliga Maclaurins formel på $F(t) = f(a+th, b+tk)$ som en funktion på intervallet $0 \leq t < 1$. $\square$

Lokala extrempunkter

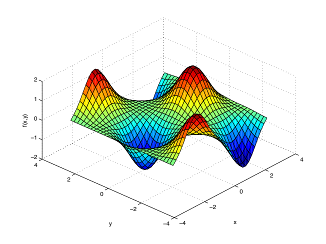
Sats

Om $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar och har ett lokal maximum eller minimum i **a** *så gäller*

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

Exempel ($f(x,y) = \sin^3(x)\cos(y) + \sin(x)\cos^3(y)$)

Vi får $\nabla f(x,y) = (0,0)$ för $(x,y) = (\pm\frac{\pi}{2}, 0)$ som svarar mot ett maximum respektive ett minimum.



Lokala extrempunkter

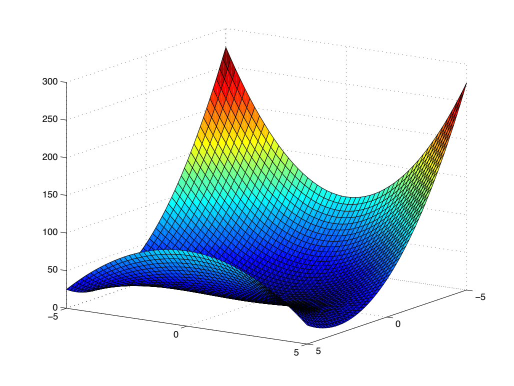
Fråga

Vilka av följande punkter är lokala extrempunkter till $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 - xy^2$*?*

X $(0, 0)$

Y $(1, 2)$

Z $(2, 4)$



Kvadratisk form

För att se om en stationär punkt är ett maximum eller minimum kan vi se närmre på den kvadratiska formen

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\right) = \frac{1}{2}\left(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2\right)$$

Eftersom

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = \begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

kan egenvärdena för den symmetriska matrisen hjälpa oss att se hur den kvadratiska formen beter sig kring origo.

- Två positiva egenvärden betyder lokalt minimum .
- Två negativa egenvärden betyder lokalt maximum.
- Ett positivt och ett negativt egenvärde betyder sadelpunkt.