

Ekvationslösning

Olof Runborg

Numerisk analys, Matematik, KTH

SF1669, VT 2015

Nedan ges fyra fixpunktiterationer för ekvationen $x^2 - 5x + 4 = 0$.

$$1 \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 4}{5}$$

$$2 \quad x_{n+1} = 5 - \frac{4}{x_n}$$

$$3 \quad x_{n+1} = \frac{3x_n^2 - 10x_n + 12}{5}$$

$$4 \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 4}{2x_n - 5}$$

Vilka av dem konvergerar mot roten $x = 1$?

Vilken konvergerar snabbast?

Newtons metod för system

I Newtons metod löses ekvationen

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{F} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d,$$

med iterationerna

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - D\mathbf{F}(\mathbf{x}_n)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_n).$$

Alternativ formulering

$$D\mathbf{F}(\mathbf{x}_n)\delta_n = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_n), \quad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \delta_n.$$

Exempel

Vi vill lösa systemet

$$\begin{aligned}\tan(x) - \cos(y/2) &= 0, \\ \tan(y) + \sin(x/2) &= 0.\end{aligned}$$

Dvs, här är

$$\mathbf{x} = (x, y), \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \tan(x) - \cos(y/2) \\ \tan(y) + \sin(x/2) \end{pmatrix}$$

och Jakobianmatrisen

$$D\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2(x)} & \frac{1}{2} \sin(y/2) \\ \frac{1}{2} \cos(x/2) & \frac{1}{\cos^2(y)} \end{pmatrix}.$$

Iteration 1

Tag startgissning $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ och beräkna \mathbf{x}_1 via

$$DF(\mathbf{x}_0)\delta_0 = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \delta_0 = \delta_0.$$

Med

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \tan(x) - \cos(y/2) \\ \tan(y) + \sin(x/2) \end{pmatrix}, \quad D\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2(x)} & \frac{1}{2} \sin(y/2) \\ \frac{1}{2} \cos(x/2) & \frac{1}{\cos^2(y)} \end{pmatrix},$$

får vi

$$\mathbf{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D\mathbf{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Det ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \delta_0 = -\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \delta_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Iteration 2

Utgå från $\mathbf{x}_1 = (1, -0.5)$ och beräkna \mathbf{x}_2 via

$$DF(\mathbf{x}_1)\delta_1 = -F(\mathbf{x}_1), \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \delta_1.$$

Vi får nu

$$F(1, -0.5) \approx \begin{pmatrix} 0.5885 \\ -0.0669 \end{pmatrix}, \quad DF(1, -0.5) \approx \begin{pmatrix} 3.4255 & -0.1237 \\ 0.4388 & 1.2984 \end{pmatrix}.$$

Det ger

$$\begin{pmatrix} 3.4255 & -0.1237 \\ 0.4388 & 1.2984 \end{pmatrix} \delta_1 = -\begin{pmatrix} 0.5885 \\ -0.0669 \end{pmatrix} \Rightarrow \delta_1 \approx \begin{pmatrix} -0.1679 \\ 0.1082 \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \delta_1 \approx \begin{pmatrix} 0.8321 \\ -0.3918 \end{pmatrix}.$$

På samma sätt får vi sedan

n	\mathbf{x}_n	δ_n	$ \delta_n $
0	0.0000 0.0000	1.0000 -0.5000	1.118033988749895
1	1.0000 -0.5000	-0.1679 0.1082	0.199756575211809
2	0.8321 -0.3918	-0.0519 0.0279	0.058938986250718
3	0.7802 -0.3638	-0.0030 0.0017	0.003469590162057
4	0.7772 -0.3622	-0.0000 0.0000	0.000010472286429
5	0.7772 -0.3622	-0.0000 0.0000	0.0000000000093775

Vi avbryter när $|\delta_n|$ tillräckligt litet.

Notera kvadratiska konvergensen.

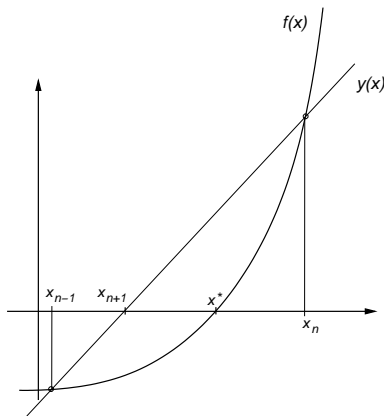
Sekantmetoden

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

- Använder både x_n och x_{n-1} för att beräkna x_{n+1} .
- Approximerar derivatan i Newton med

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

- Konvergensordning $p \approx 1.6$.
- För skalära ekvationer.



Intervallhalveringsmetoden (bisection method)

Starta från intervall $[a, b]$ där $f(a)$ och $f(b)$ olika tecken

- 1 Gissa på intervallets mittpunkt $x = (a + b)/2$.
- 2 $f(a)$ och $f(x)$ har olika tecken \Rightarrow byt intervall $[a, b] \mapsto [a, x]$.
- 3 $f(b)$ och $f(x)$ har olika tecken \Rightarrow byt intervall $[a, b] \mapsto [x, b]$.
- 4 Upprepa 1-3 till $|b - a|$ tillräckligt litet.
 - Robust, a, b kan vara långt från x^*
 - Linjär konvergens
 - För skalära ekvationer.

