

Extremvärden

Olof Runborg

Numerisk analys, Matematik, KTH

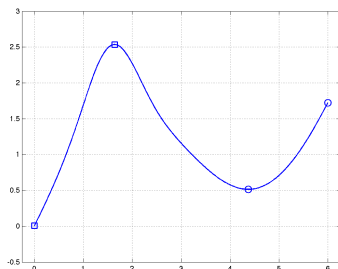
SF1669, VT 2015

Lokala och globala max/min

Betrakta $f(\mathbf{x})$ definierad för $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$.

- **Lokalt maximum i \mathbf{x}_0** när $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ för alla $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ i någon omgivning av \mathbf{x}_0
- **Globalt maximum i \mathbf{x}_0** när $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ för alla $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$

(Analogt för lokalt/global min.)

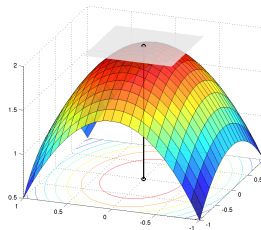


Sats

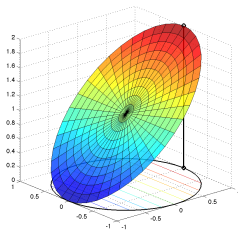
Om f kontinuerlig och \mathcal{D} kompakt (=sluten och begränsad)
 \Rightarrow globala max- och min-punkter existerar.

Nödvändiga villkor för extremvärden

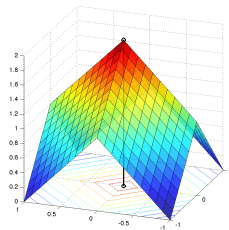
Om \mathbf{x}_0 är lokal extrempunkt till f i \mathcal{D} är \mathbf{x}_0 en av följande:



Kritisk punkt
 $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$



Randpunkt
 $\mathbf{x}_0 \in \partial\mathcal{D}$



Singulär punkt
 $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ existerar ej

Klassificering av kritiska punkter

Antag \mathbf{x}_0 **kritisk punkt** dvs $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ (och f snäll).

Bilda Hessianen \mathbf{H} , dvs matrisen av andraderivator, ex

$$f = f(x, y) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Då gäller

- $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$ **positivt definit** $\Rightarrow \mathbf{x}_0$ lokalt **min**
(dvs alla egenvärden positiva)
- $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$ **negativt definit** $\Rightarrow \mathbf{x}_0$ lokalt **max**
(dvs alla egenvärden negativa)
- $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$ **indefinit** $\Rightarrow \mathbf{x}_0$ **sadelpunkt**
(dvs både positiva och negativa egenvärden)