SF1669 Matematisk och numerisk analys II

Tolfte föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

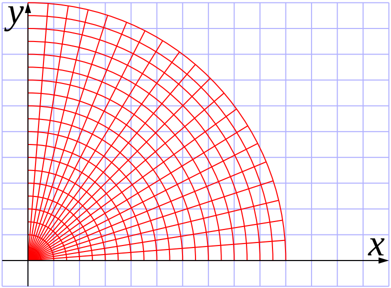
12 februari 2015

Repetition

- Dubbelintegralen $\iint_D f(x, y)\, dxdy$ kan tolkas som volymen under grafen för $f(x, y)$.
- Dubbelintegraler över rektangulära områden definieras genom Riemannsummor, dvs dubelintegraler av styckvis konstanta funktioner som ger övre och undre uppskattningar.
- Kontinerliga funktioner är integrerbara över rektanglar.
- Genom upprepad integration kan dubbelintegraler över rektanglar beräknas som två enkelintegraler.

Polära koordinater

När vi ska integrera över en cirkelsektor kan det vara praktiskt med polära koordinater. Vi får ett rutnät



Här är inte alla rutor lika stora, så vi måste ha med det i beräkningen. Rutornas area är proportionell mot avståndet till origo och vi får

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,drd\varphi.$$

Integration i polära koordinater

Fråga

Beräkna $\iint_D x^2 + y^2 \, dxdy$ *där D är kvartscirkeln* $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

A. $\frac{\pi}{2}$
B. $\frac{\pi}{3}$
C. $\frac{\pi}{4}$
D. $\frac{\pi}{6}$
E. $\frac{\pi}{8}$
F. $\frac{\pi}{12}$

Variabelbyte i dubbelintegraler

När vi går över från rektangulära koordinater (x, y) till polära koordinater (r, φ) har vi att

$$dxdy = r\, d\varphi dr.$$

Detta är ett exempel på något mer generellt. Som vi sett tidigare har vi vid koordinatbytet

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{cases}$$

Jacobianen, eller Jacobideterminanten,

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} = r$$

Variabelbyte

Fråga

Bestäm Jacobianen vid koordinatbytet

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \end{cases}$$

A. $u^2 - v^2$
B. $2uv$
C. $x^2 + y^2$
D. $4(u^2 + v^2)$
E. $2(x^2 - y^2)$
F. $4xy$
G. $\sqrt{x^2 + y^2}$

Generellt variabelbyte

Mer generellt är det Jacobianen, eller Jacobideterminanten, som talar om hur areaelementen ska omvandlas och vi får

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(g(u,v),h(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,dudv.$$

För att detta säkert ska gälla krävs några förutsättningar:

- Koordinatbytet $(g,h)\colon E \longrightarrow D$ ska vara inverterbart och $\mathcal{C}^1$
- Båda områdena ska vara kvadrerbara, dvs randen ska vara en nollmängd.
- Båda funktionerna $f(x,y)$ och $f(g(u,v),h(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ ska vara integrerbara på sina respektive områden.

Generaliserade dubbelintegraler

När området är obegränsat behöver vi generaliserade dubbelintegraler.
För att vara säker på att den är väldefinierad ser vi om både den positiva delen och den negativa delen är konvergenta.
Skriv

$$f(x,y) = f^+(x,y) - f^-(x,y)$$

där $f^+(x,y) \geq 0$ och $f^-(x,y) \geq 0$.

Definition

Den generaliserade integralen $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ är konvergent om det finns tal M^+ och M^- så att

$$\iint_D f^+(x,y)\,dxdy < M^+ \quad \text{och} \quad \iint_D f^-(x,y)\,dxdy < M^-$$

för varje kompakt kvadrerbart delområde D av integrationsområdet.

Medelvärdessatsen

Arean av ett område D kan beräknas som

$$\text{Area}(D) = \iint_D 1\,dxdy.$$

Medelvärdet för $f(x,y)$ på D ges av

$$\frac{1}{\text{Area}(D)} \iint_D f(x,y)\,dxdy = \frac{\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy}{\displaystyle\iint_D 1\,dxdy}$$

Sats

Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på det kompakta sammanhängande området D så finns en punkt (x_0, y_0) i D så att

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{\text{Area}(D)} \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$