Interpolation och numerisk integration

Olof Runborg

Numerisk analys, Matematik, KTH

SF1669, VT 2015

Interpolation

Existens och entydighet

Om $x_0, x_1, \ldots, x_n$ är distinkta finns ett unikt polynom av gradtal max n som interpolerar punkterna (x_0, y_0), (x_1, y_1), $\ldots$, (x_n, y_n).

Ex: Exakt en linje passerar genom två distinkta punkter.

Beräknas genom att lösa linjärt ekvationssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

där $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$

Interpolationsfel

Antag att $f(x)$ är en snäll funktion.

Interpolationsfelet (punktvis)

Om $p(x)$ interpolerar $f(x)$ i noderna $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ gäller

$$f(x) - p(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

för något $\xi \in [x_0, x_n]$ när $x \in [x_0, x_n]$. (ξ beror på x.)

Maxfelet vid linjär interpolation

Om $p(x)$ är linjär funktion som interpolerar $f(x)$ i noderna a och b gäller

$$\max_{a\le x\le b} |f(x) - p(x)| \le \frac{(b-a)^2}{8} \max_{a\le \xi\le b} |f''(\xi)|$$

Ekvidistant interpolation

Lika långt mellan alla noder i intervallet $[a, b]$

$$x_j = a + jh, \qquad h = (b - a)/n,$$

för n noder. (n antas stort, h litet.)

- Interpolation med högt gradtal på ekvidistanta noder ofta dåligt. Ger stora fel på grund av Runges fenomen (vilda oscialltioner i intervallets ändpunkter). Felet $\not\to 0$ när antal punkter n ökar.
- Styckvis polynominterpolation bättre.

Styckvis linjär interpolation

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{a \leq \xi \leq b} |f''(\xi)|$$

Felet $\to 0$ som $O(h^2)$ när $h \to 0$ ($n \to \infty$).
Noggrannhetsording 2.

Numerisk integration

- Trapetsregeln = exakt integration av styckvis linjär interpolation

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$

där $x_j = a + jh$ och $h = (b-a)/n$.
Noggrannhetsording 2.

- Simpsons formel = exakt integration av styckvis kvadratisk interpolation

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{\substack{j \text{ udda} \\ 0<j<n}} f(x_j) + 2\sum_{\substack{j \text{ jämn} \\ 0<j<n}} f(x_j) + f(x_n)\right).$$

Noggrannhetsording 4.

Fråga

Approximera

$$\int_0^4 \frac{2x}{2^x} dx$$

med trapetsregeln och steglängd $h = 1$. Svaret blir

1. 2
2. 5/2
3. 3
4. 13/4
5. 15/4

Fråga

Approximera

$$\int_0^4 \frac{2x}{2^x} dx$$

med Simpsons formel och steglängd $h = 1$. Svaret blir

1. 8/3
2. 3
3. 19/6
4. 10/3
5. 19/2

Numerisk integration i 2D

Betrakta dubbelintegralen

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

Ide: Applicera 1D-varianten av trapetsregeln på de upprepade integralerna. Använd $n_x + 1$ punkter i x-led och $n_y + 1$ punkter i y-led:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \approx \sum_{j=0}^{n_x} \sum_{k=0}^{n_y} f(x_j, y_k) h_x h_y w_{j,k}$$

där

$$w_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{inre punkter,} \\ 1/2, & \text{kantpunkter,} \\ 1/4, & \text{hörnpunkter.} \end{cases}$$

Nodpunkterna ges av $x_j = a + jh_x$ och $h_x = (b-a)/n_x$ och $y_k = c + kh_y$ och $h_y = (d-c)/n_y$.

Fråga

Approximera

$$\int_0^1 \int_0^1 \cos^2(xy\pi)dxdy$$

med trapetsregeln och steglängd $h = 1/2$. Svaret blir

1. 1/2
2. 5/8
3. 13/8
4. 5/2
5. 13/2

Noggrannhetsordning

Definition

Noggrannhetsordning för $u_h \approx u$ är det största p så att

$$|u_h - u| \leq Ch^p,$$

för något tal C som är oberoende av h.

Ofta gäller starkare samband

$$u_h - u \approx Ch^p \qquad \Rightarrow$$

- Felet minskar med faktorn 2^p när h halveras
- Plot av felet $|u_h - u|$ mot h i loglog ger rak linje med lutning p
- $|u_h - u| \leq 2|u_h - u_{h/2}|$ (om $p \geq 1$) $\Rightarrow$ Gör alltid (minst) två beräkningar, med h och $h/2$, för att få en uppfattning av felet.
- Noggrannhetsordningen kan uppskattas från u_h, $u_{h/2}$ och $u_{h/4}$,

$$\frac{u_h - u_{h/2}}{u_{h/2} - u_{h/4}} \approx 2^p.$$

Fråga

Felen vid en viss typ av interpolation med olika steglängder h blev

h	0.2	0.1	0.05	0.025
fel	$1.8365 \cdot 10^{-4}$	$1.2042 \cdot 10^{-5}$	$7.6157 \cdot 10^{-7}$	$4.7738 \cdot 10^{-8}$

Vad är noggrannhetsordningen?

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5

Fråga

Resultaten I_h från en viss numerisk kvadraturmetod med olika steglängder h var

h	0.2	0.1	0.05	0.025
I_h	3.2861	3.1954	3.1500	3.1272

Vad är noggrannhetsordningen?

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5