SF1669 Matematisk och numerisk analys II

Sextonde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

23 februari 2015

Repetition

- Trippelintegraler $\iiint_K f(x, y, z)\, dxdydz$ ges av Riemannsummor.
- Variabelbyte med beloppet av Jacobianen, $\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, t, u)}\right|$.
- Vid cylinderkoordinater är $dxdydz = r\, drd\theta dz$.
- Vid sfäriska koordinater är $dxdydz = r^2 \sin\phi\, drd\phi d\theta$.
- Volymen av en kropp K ges av

$$V = \iiint_K 1\, dxdydz.$$

- Arean av en yta $\mathbf{r}(s, t)$ ges av

$$A = \iint_D \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right| dsdt.$$

Tröghetsmoment

Rörelseenergin för en stelkropp K under rotation med en vinkelhastighet ω ges av $J\omega^2/2$ där

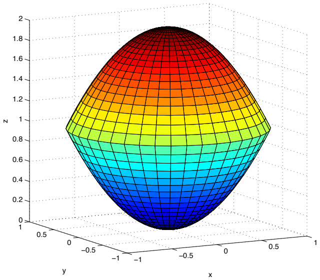
$$J = \iiint_K \rho(x,y,z) D^2(x,y,z)\, dxdydz$$

där $D(x,y,z)$ är avståndet från (x,y,z) till rotationsaxeln.

Exempel (Tentamen 2013-01-10, Uppgift 3)

Kroppen K ges av $x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$. Beräkna tröghetsmomentet m.a.p. z-axeln, dvs

$$\iiint_K (x^2 + y^2)\, dxdydz$$

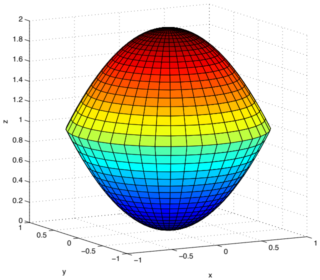


Tröghetsmoment

Exempel (Tentamen 2013-01-10, Uppgift 3)

Kroppen K ges av
$x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$.
Beräkna tröghetsmomentet m.a.p. z-axeln, dvs

$$\iiint_K (x^2 + y^2)\, dxdydz$$



Fråga

Var börjar vi?

A. Beskriva kroppen
B. Välja koordinater (rektangulära, sfäriska eller cylindriska)
C. Välja integrationsmetod

Tyngdpunkt

Tyngdpunkten, eller masscentrum, hos en kropp K ges av

$$(x_c, y_c, z_c) = \frac{1}{m} \iiint_K (x, y, z)\rho(x, y, z)\, dxdydz,$$

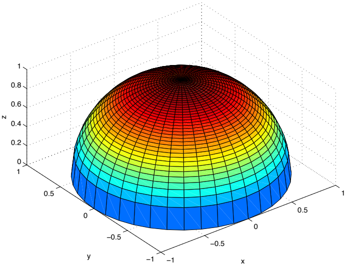
där m är kroppens massa.

Exempel (Tentamen 2013-08-22, Uppgift 6)

Låt K vara ett homogent halvklot som har radie R, medelpunkt i origo och ligger över xy-planet. Beräkna z-koordinaten för kroppen K:s masscentrum, dvs

$$\frac{1}{V} \iiint_K z\, dxdydz$$

där V är volymen av K.



Medelvärden

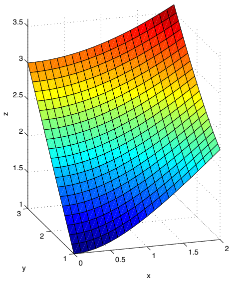
Vi kan beräkna medelvärden över områden genom

$$m_K(f) = \frac{\iiint_K f(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_K 1\,dxdydz}$$

i rummet eller

$$m_D(f) = \frac{\iint_D f(x,y)\,dxdy}{\iint_D 1\,dxdy}$$

i planet.



Exempel

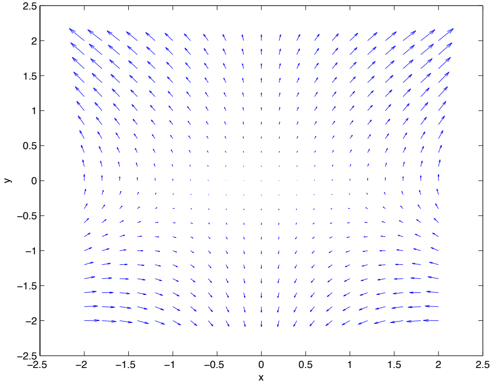
Bestäm det genomsnittliga avståndet till origo från punkter i rektangeln $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 3$, dvs beräkna

$$\frac{1}{2}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$$

Vektorfält

Definition

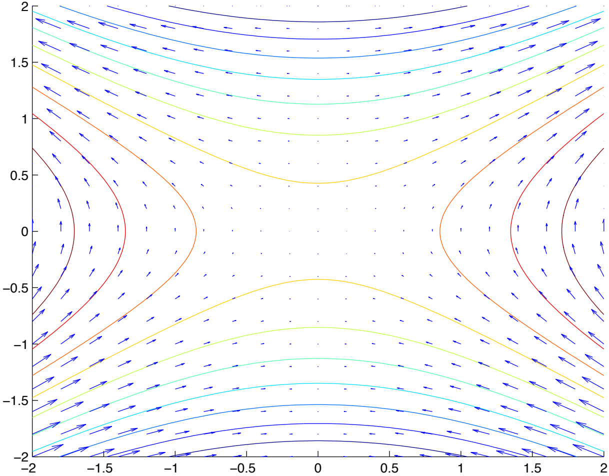
Ett vektorfält på ett område D i $\mathbb{R}^n$ är en funktion $\mathbf{F} \colon D \longrightarrow \mathbb{R}^n$.



Figur : Matlab ritar ut vektorfält med `quiver`

Fältlinjer

Vektorfältets fältlinjer har vektorfältet som tangentvektorer.



Konservativa vektorfält och potentialer

Definition

Ett vektorfält $\mathbf{F}$ är konservativt om $\mathbf{F} = \nabla f$ för någon potential f.

Sats

Om $\mathbf{F}(x,y) = \nabla f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ *så gäller* $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Fråga

Vad av följande stämmer?

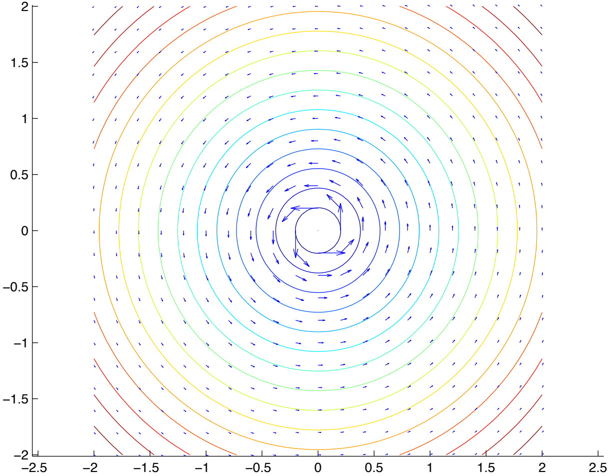
A. *Alla vektorfält med* $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ *är konservativa.*

B. *Det kan finnas vektorfält med* $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ *som inte är konservativa.*

C. *Båda ovanstående stämmer.*

D. *Inget av dem stämmer.*

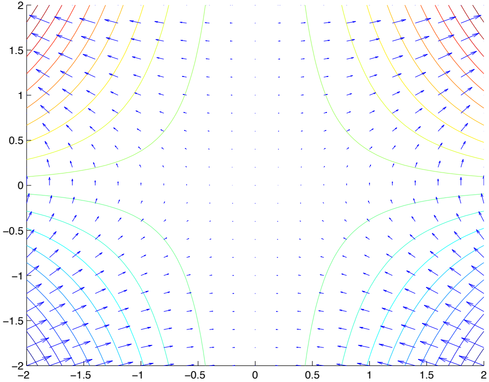
Ett exempel på icke-konservativt fält med $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$



Ekvipotentiallinjer

Definition

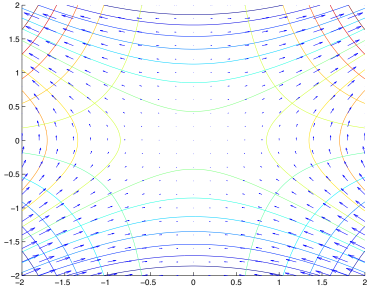
För ett konservativt vektorfält $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ ges ekvipotentiallinjerna av nivåkurvorna för potentialen f.



Fält- och ekvipotentiallinjer

Sats

Fältlinjer och ekvipotentiallinjer är vinkelräta mot varandra.



Bevis.

$\nabla f(x, y)$ är vinkelrät mot alla nivåkurvor $f(x, y) = c$. $\square$