KTH Engineering Sciences

Laboration 2

Numerisk integration och differentialekvationer

Notera numeriska resultat och producera efterfrågade plottar. På redovisningen ska båda i laborationsgruppen kunna redogöra för teorin för de numeriska metoder ni använder och och förklara hur era MATLAB*-program fungerar. Kom väl förberedd. Ordna programfiler så att redovisningen går smidigt.*

1. Numerisk integration i flera variabler

Olja läcker ut genom ett hål i en meterdjup bassäng. Koncentrationen av olja runt hålet $(x_h, y_h, z_h) = (1.25, 0, 0.25)$ ges av

$$c(x, y, z) = e^{-d(z)[(x-x_h)^2+y^2]} \cos(y(x - x_h)) \text{ [kg/m}^3\text{]},$$

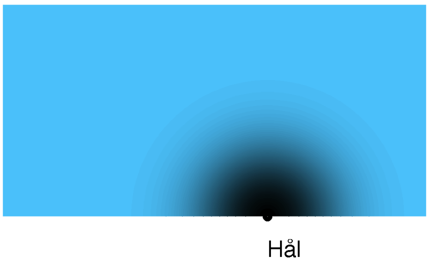
där $d(z)$ specificeras nedan. Ni ska räkna ut totala massan olja m_O i bassängen, vilken ges av trippelintegralen

$$m_O = \iiint_\Omega c(x, y, z)dxdydz,$$

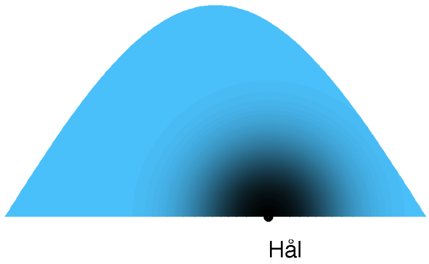
om Ω representerar bassängen. Ni ska göra detta för tre olika fall med hjälp av trapetsregeln i högre dimensioner. För varje fall skall ni:

- Använda en effektiv diskretisering i den meningen att att steglängden i alla dimensioner ska vara (ungefär) lika stor överallt.
- Få ett svar som har minst sex korrekta decimaler.
- Verifiera att noggrannhetsordningen för er implementation är två. Ni kan göra det på olika sätt, t.ex. genom att beräkna lösningar med successivt halverad steglängd och studera kvoter av differenser, eller genom att beräkna en referenslösning och studera felets avtagande med steglängden. Se anteckningarna om noggrannhetsordning i kurslitteraturen.

Fall 1: Bassängen är rätblocket $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$ och $0 \le z \le 1$. Funktionen $d(z) \equiv 10$ är konstant. Eftersom c då inte beror på z reducerar uttrycket för m_O till en dubbelintegral i x och y.



Fall 2: Bassängen har den rundade formen given av $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le \sin(\pi x/2)$ och $0 \le z \le 1$. Som i Fall 1 är $d(z) \equiv 10$, konstant, och m_O ges av en dubbelintegral.



Ledning: Steglängden h_y i y-led kommer behöva variera med x så att höjden $y(x)$ på bassängen vid x alltid är en heltalsmultipel av h_y. Samtidigt ska man välja h_y ungefär lika stor som steglängden h_x i x-led. Ett sätt att uppnå detta är att sätta $h_y = y(x)/\texttt{round}(y(x)/h_x)$. Man kan också behöva specialbehandla området vid $x = 0$ och $x = 2$.

Fall 3: Samma bassäng som i Fall 2, men med

$$d(z) = 50(z + z_h)e^{-z/2z_h}.$$

Det ger en noggrannare beskrivning av koncentrationen som även tar hänsyn till skillnader i z-led. Den fulla trippelintegralen måste nu lösas.