

SF1669 Matematisk och numerisk analys II

Sjuttonde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

24 februari 2015

Repetition

- ▶ **Tröghetsmoment** ges av $J = \iiint_K \rho D^2 dx dy dz$
- ▶ Ett **vektorfält** är en funktion $\mathbf{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, som ger en vektor i varje punkt.
- ▶ **Fältlinjerna** har tangentvektorer som är parallella med vektorfältet.
- ▶ Vektorfältet \mathbf{F} är **konservativt** om $\mathbf{F} = \nabla f$ för någon **potential** f .
- ▶ Ekvipotentiallinjer (-ytor) är nivåkurvor för potentialen och de är vinkelräta mot fältlinjerna.
- ▶ Ett **nödvändigt** villkor för att $\mathbf{F} = (P, Q)$ ska vara konservativt är att

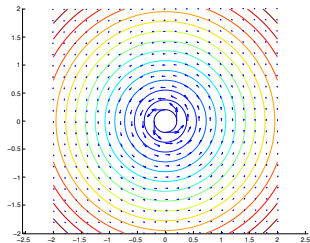
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

- ▶ Villkoret är inte **tillräckligt** i allmänhet.

Ett exempel på icke-konservativt fält med $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

uppfyller $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ överallt
utom i origo.



Om $[r, \theta]$ är polära koordinater gäller

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{och} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

men $\theta(x, y)$ är inte väldefinierad i hela \mathbb{R}^2 .

Kurvintegraler

Om $\mathbf{r}(t)$ är en parametrisering av en kurva γ i planet kan vi beräkna en integral av $f(x, y)$ längs kurvan genom

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Exempel

Bestäm det genomsnittliga värdet för $f(x, y) = x^2 y^2$ på enhetscirkeln.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = \frac{1}{8}.$$

Kurvintegraler av vektorfält

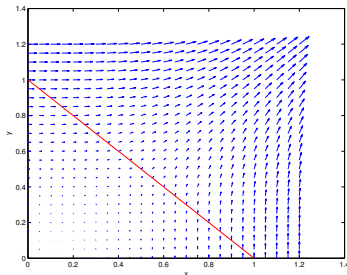
Vi kan integrera ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y)$ längs en kurva γ genom

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

om $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ är en parametrisering av γ .

Exempel (SF1626 –
Tentamen 2013-05-27,
Uppgift 3(a))

Låt $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x^2)$ och
beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
där γ är linjesegmentet från
punkten $(0, 1)$ till punkten $(1, 0)$.



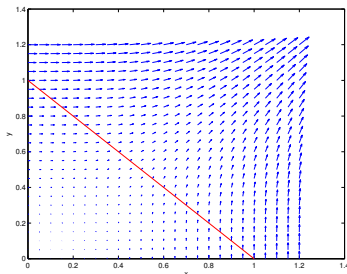
Kurvintegral

Exempel (SF1626 –
Tentamen 2013-05-27,
Uppgift 3(a))

Låt $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x^2)$ och
beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$
där γ är linjesegmentet från
punkten $(0, 1)$ till punkten $(1, 0)$.

Fråga

Vi kan skriva upp integralen
som $\int_{\gamma} P dx + Q dy$. Vad är P
och Q ?



- A. $P = 2y, Q = 2x$
- B. $P = y^2, Q = x^2$
- C. $P = -y^2, Q = x^2$
- D. $P = x^2, Q = -y^2$

En tentamensuppgift till

Exempel

För att beräkna arbetet som ett vektorfält \mathbf{F} utför används kurvintegralen $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

1. Beräkna kurvintegralen då $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ och γ ges av $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$, där t går från -2 till 2 . **(2 p)**
2. Ge ett exempel på ett vektorfält \mathbf{F} sådant att kursvintegralens värde blir 2 när kurvan γ ges av enhetscirkeln som genomlöps ett varv moturs. **(2 p)**

Fråga

Var börjar vi?

- A. Parametrisera kurvan
- B. Uttryck vektorfältet i parametern
- C. Rita upp kurvan
- D. Beräkna $d\mathbf{r}$

Kurvintegral med potential

Om \mathbf{F} är konservativt är $\mathbf{F} = \mathbf{grad} f$ för en potential $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.
Då får vi

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{grad} f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = [f(\mathbf{r}(t))]_a^b = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

eftersom kedjeregeln ger att

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{grad} f \cdot \mathbf{r}'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t).$$

Exempel

Låt $\mathbf{F}(x, y) = (xy^2, x^2y)$ och beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ är linjesegmentet från punkten $(0, 1)$ till punkten $(1, 0)$.

Oberoende av väg

Sats

Följande påståenden är ekvivalenta för ett vektorfält \mathbf{F} i ett område D :

1. \mathbf{F} är konservativt.
2. Integralen $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ beror bara på start och ändpunkt.
3. Integralen $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten kurva i D .

Idé till bevis.

$1 \Rightarrow 2$: $\int_{\gamma} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$.

$1 \Leftarrow 2$: Vi kan definiera $f(x, y) = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ går från en given punkt O till (x, y) . Vi behöver visa att $\nabla f = \mathbf{F}$.

$2 \Leftrightarrow 3$: Integralen över en sluten kurva kan ses som skillnaden mellan två integraler med samma start- och ändpunkter.



Flöde genom kurva

Om vi istället för att beräkna vektorfältets del utefter kurvan ser på den del som är ortogonal mot kurvan får vi flödet genom kurvan som

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds$$

där \mathbf{N} är en normerad normalvektor till γ i den aktuella punkten. Eftersom vi kan se $d\mathbf{r}$ som (dx, dy) kan vi se $\mathbf{N} ds$ som $(-dy, dx)$ eller $(dy, -dx)$ beroende på vilket håll vi väljer normalvektorn.

Exempel

Beräkna flödet ut genom enhetscirkeln av vektorfältet $\mathbf{F} = (x, y) = \mathbf{grad} \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.