SF1669 Matematisk och numerisk analys II

Tjugonde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

3 mars 2015

Repetition

- Divergensen av ett vektorfält $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ är

$$\mathbf{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

- Rotationen av ett vektorfält $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ är

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

- $\mathbf{F}$ är divergensfritt om $\mathbf{div}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$. ($\mathbf{rot}\,\mathbf{G}$ är divergensfritt)
- $\mathbf{F}$ är rotationsfritt om $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$. ($\mathbf{F} = \nabla f$ är rotationsfritt.)
- Greens formel säger att

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Tentamensuppgift

Exempel (Uppgift 3, tentamen i SF1626 2015-10-30)

För att beräkna arbetet som ett vektorfält **F** utför används kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

1. Beräkna kurvintegralen då $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ och γ ges av $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$, där t går från -2 till 2. **(2 p)**
2. Ge ett exempel på ett vektorfält **F** sådant att kursvintegralens värde blir 2 när kurvan γ ges av enhetcirkeln som genomlöps ett varv moturs. **(2 p)**

En tentamensuppgift till

Exempel (Uppgift 8, tentamen i SF1626 2015-09-26)

Betrakta kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

där γ är den positivt orienterade slutna kurva som innesluter det område som i polära koordinater beskrivs av olikheterna $1 \leq r \leq 2$ och $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

1. Beräkna kurvintegralens värde genom parametrisering av kurvan γ. **(2 p)**
2. Beräkna kurvintegralens värde genom användning av Greens formel. **(2 p)**

Area med Greens formel

Om $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ får vi områdets area genom

$$\mu(D) = \iint_D 1\,dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy.$$

Exempelvis får vi

$$\mu(D) = \int_{\partial D} -y\,dx = \int_{\partial D} x\,dy = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -y\,dx + x\,dy.$$

Exempel

Beräkna arean av området som ges av $r \leq \sin^2\theta$ i polära koordinater.

Flöde genom kurva

Om vi istället för att beräkna vektorfältets del utefter kurvan ser på den del som är ortogonal mot kurvan får vi flödet genom kurvan som

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, ds$$

där **N** är en normerad normalvektor till γ i den aktuella punkten. Eftersom vi kan se $d\mathbf{r}$ som (dx, dy) kan vi se $\mathbf{N}\,ds$ som $(-dy, dx)$ eller $(dy, -dx)$ beroende på vilket håll vi väljer normalvektorn.

Exempel

Beräkna flödet ut genom enhetscirkeln av vektorfältet $\mathbf{F} = (x, y) = \mathbf{grad}\, \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Divergenssatsen i planet

Med Green's formel kan vi skriva om flödet av $\mathbf{F} = (P, Q)$ genom randen till ett område D som

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds = \int_{\partial D} (P, Q) \cdot (dy, -dx) = \int_{\partial D} -Q\, dx + P\, dy$$
$$= \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D \mathbf{div}\, \mathbf{F}\, dxdy$$

Sats (Divergenssatsen)

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, ds = \iint_D \mathbf{div}\, \mathbf{F}\, dxdy$$

Divergenssatsen i rummet

Sats (Divergenssatsen)

$$\int_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_K \mathbf{div}\, \mathbf{F} \, dxdydz$$

om

1. *K är kompakt,*
2. **F** *är kontinerligt deriverbart vektorfält,*
3. *randen ∂K till K är styckvis kontinuerligt deriverbar och*
4. **N** *en utåtriktad normalvektor.*

Tentamensuppgift

Exempel (Uppgift 8 på tentamen i SF1626, 2015-01-12)

Låt Ω vara området som ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ och $x^2 + y^2 \geq a^2$, och låt

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + yz, -xz + y, z - e^x \sin y).$$

Beräkna flödet av vektorfältet **F** ut från Ω. **(4 p)**