SF1669 Matematisk och numerisk analys II

Tjugoförsta föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

6 mars 2015

Repetition

- Divergenssatsen i planet säger att flödet genom randkurvan är integralen av divergensen över området, dvs

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, ds = \iint_D \operatorname{\mathbf{div}} \mathbf{F} \, dxdy.$$

- Divergenssatsen i rummet säger att flödet genom randytan är integralen av divergensen över området, dvs

$$\iint_{\partial KL} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iiint_K \operatorname{\mathbf{div}} \mathbf{F} \, dxdydz.$$

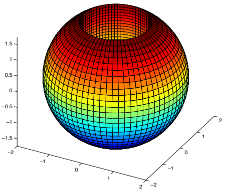
Tentamensuppgift

Exempel (Uppgift 8 på tentamen i SF1626, 2015-01-12)

Låt Ω vara området som ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ och $x^2 + y^2 \geq a^2$, och låt

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + yz, -xz + y, z - e^x \sin y).$$

Beräkna flödet av vektorfältet **F** ut från Ω. **(4 p)**



Stokes sats

En generalisering av Greens sats till kurvorintegraler i rummet ges av Stokes sats.

Sats

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{rot}\, \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

om

- $\mathbf{F}$ *är kontinuerligt deriverbart vektorfält,*
- *ytan* S *är styckvis* $\mathcal{C}^1$*,*
- *randkurvan* ∂S *är styckvis* $\mathcal{C}^1$ *och positivt orienterad.*

Obs!

Om S ligger helt i xy-planet och $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ säger Stokes sats samma sak som Greens formel.

Stokes sats

Exempel (Tentamem 2013-08-22, Uppgift 9)

Ett källfritt vektorfält $\mathbf{F}$ har en vektorpotential $\mathbf{A}$ om $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$.

(a) Ta fram en vektorpotential till $\mathbf{F} = (x, x - 3y, y + 2z)$

(b) Använd Stokes sats och vektorpotentialen i deluppgift (a) för att beräkna

$$\iint_S (x, x - 3y, y + 2z) \cdot d\mathbf{S}$$

där S är halvsfären $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, $z \leq 1$ och ytelementet $d\mathbf{S}$ pekar bort från z-axeln.

Obs!

För att det ska kunna finnas en vektorpotential måste $\mathbf{div}\,\mathbf{F} = 0$ eftersom $\mathbf{div}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{A} = 0$.

Vektorpotential

Exempel (Tentamem 2013-08-22, Uppgift 9)

Ett källfritt vektorfält **F** har en vektorpotential **A** om $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$.

(a) Ta fram en vektorpotential till $\mathbf{F} = (x, x - 3y, y + 2z)$

Fråga

Var börjar vi?

A. Ansätt polynom för $\mathbf{A} = (P, Q, R)$.

B. Börja med en ekvation och sätt in resultatet i de andra.

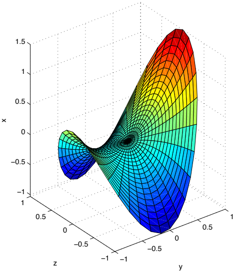
C. Byt koordinater.

Stokes sats och potentialer

Sats

Om vektorfältet $\mathbf{F}$ *är definierat på ett enkelt sammanhängande område i* $\mathbb{R}^3$ *så gäller att*

$$\mathbf{F} \text{ är konservativt} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{F} \text{ är rotationsfritt}$$



Idé.

kurvintegralen blir oberoende av väg eftersom den blir noll på varje sluten kurva enligt Stokes sats. $\square$

Kursens mål

- Ett övergripande mål med kursen är att studenten ska utveckla en god förståelse för grundläggande matematiska begrepp inom flervariabelanalys och kunna använda dessa för att matematiskt modellera ingenjörsvetenskapliga och naturvetenskapliga problem.
- Studenten ska utveckla en färdighet i att, med hjälp av dator, illustrera centrala begrepp och lösa tillämpade problem med hjälp av färdiga funktioner ur programspråkets bibliotek. Dessutom ska studenten kunna visualisera och presentera resultaten på ett tydligt sätt.

Specifika lärandemål

Efter genomgången kurs ska studenten för godkänt betyg kunna använda, förklara och tillämpa terminologin och de viktigaste grundbegreppen och problemlösningsmetoderna, särskilt:

- tolka funktionsgrafer och nivåkurvor/nivåytor och skissera sådan kurvor och ytor i enklare fall
- beräkna partiella derivator och använda kedjeregeln för reell- och vektorvärda funktioner av flera variabler
- approximera partiella derivator med finita differenser av olika noggrannhetsordning samt ha kännedom om approximationsfelen
- bestämma och klassificera kritiska punkter
- använda Taylors formel för att approximera funktioner samt uppskatta approximationsfelets storlek
- använda Jacobimatrisen för att genomföra linjär approximation

Lärandemål, forts

- lösa icke-linjära ekvationssystem med numeriska metoder
- använda gradienten för att beräkna riktingsderivata och visa förståelse för gradientens förhållande till nivåkurvor/nivåytor
- lösa vissa optimeringsproblem, även med bivillkor
- förklara hur multipelintegraler definieras och hur de kan approximeras med hjälp av Riemannsummor
- beräkna vissa multipelintegraler med hjälp av upprepad enkelintegrering och variabelbyten, speciellt till polära, cylindriska och rymdpolära (sfäriska) koordinater
- lösa integraler numeriskt med metoder av olika noggrannhersordning samt ha kännedom om approximationsfelen
- visa förståelse för hur man kan använda integralkalkyl för att beräkna längder, areor, volymer och andra storheter som t ex massa och tyngdpunkt

Lärandemål, forts

- redogöra för hur kurvintegraler samt yt- och flödesintegraler definieras samt genomföra beräkningar av enklare sådana med hjälp av parameterisering
- lösa system av första ordningens ordinära differentialekvationer med numeriska metoder av olika noggrannhetsordning samt visa förståelse för begreppen konvergens och stabilitet
- redogöra för och tillämpa Greens formel och Gauss sats (Divergenssatsen)
- förklara begreppen potential och konservativt vektorfält samt använda dessa i beräkningar

För högre betyg ska studenten dessutom kunna

- Visa förståelse för hur Jacobimatrisen kan användas för att avgöra om en funktion är lokalt inverterbar.
- Tillämpa implicita funktionssatsen.
- Redogöra för och tillämpa Stokes sats
- Beräkna gränsvärden för funktioner av flera variabler och identifiera situationer när gränsvärde saknas.
- Redogöra för begreppen gränsvärde, kontinuitet, deriverbarhet och differentierbarhet för reellvärda funktioner av flera variabler.
- Lösa problem som kräver mer omfattande beräkningar i flera steg.
- Generalisera och anpassa metoder för att användas i delvis nya situationer.
- Lösa problem som kräver syntes av material och idéer från hela kursen
- Härleda viktiga samband och satser och algoritmer.
- Redogöra för teorin bakom begreppen numerisk konvergens och stabilitet.