KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
13 mars 2015

Skrivtid: 8.00-13.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Planet H ges av ekvationen $3x - 2y + 5z + 1 = 0$.
   a) Bestäm en linje N som är vinkelrät mot H. **(2 p)**
   b) Bestäm en linje L som inte skär planet H. **(2 p)**

2. Låt $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ vara standardbasen för $\mathbb{R}^3$. Betrakta den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ som är definierad genom

$$F(\vec{e_1}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, F(\vec{e_2}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad F(\vec{e_3}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Bestäm $F(\vec{v})$ där $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(1 p)**
   (b) Bestäm dimensionen av nollrummet $\operatorname{Ker}(F)$, och bildrummet $\operatorname{Im}(F)$. **(2 p)**
   (c) Bestäm en bas för nollrummet $\operatorname{Ker}(F)$. **(1 p)**

3. (a) Vad menas med begreppet egenvektor? **(1 p)**
   (b) Avgör vilka vektorerna

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

   som är egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. **(2 p)**
   (c) Bestäm egenvärden och tillhörande egenrum till matrisen A. **(1 p)**

DEL B

4. I $\mathbb{R}^4$ har vi, för varje tal a, följande tre vektorer

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ a \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Vi låter $V = \operatorname{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ vara deras linjära hölje.

(a) Bestäm för vilka värden a vektorrummet V har dimension tre. **(2 p)**

(b) Låt $a = 1$, och bestäm en bas till det ortogonala komplementet $V^\perp$. **(2 p)**

5. (a) Definiera vad som menas med *koordinatvektorn* för en vektor med avseende på en bas. **(1 p)**

(b) Betrakta följande vektorer i $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^2$ sådan att koordinatvektorn för $\vec{v}$ är $\vec{w}$ och koordinatvektorn för $\vec{w}$ är $\vec{v}$. **(3 p)**

6. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ och $\vec{n} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ vara två nollskilda vektorer i $\mathbb{R}^2$, där $ac + bd = 0$. Låt L vara det linjära höljet till $\vec{v}$.

(a) Varför är $\beta = \{\vec{v}, \vec{n}\}$ en bas för $\mathbb{R}^2$? **(1 p)**

(b) Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara speglingen om linjen L. Bestäm matrisrepresentationen B till T med avseende på basen β. **(1 p)**

(c) Låt P vara basbytesmatrisen från standardbasen till β. Bestäm $P^{-1}BP$. **(2 p)**

Var god vänd!

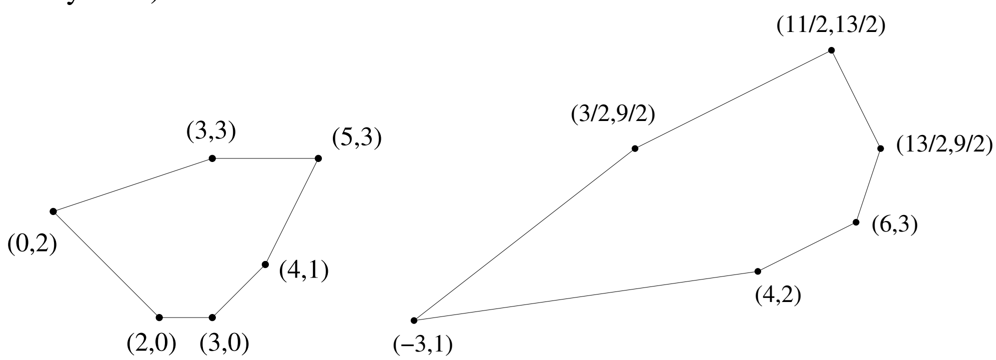
DEL C

7. Talföljden $\{f_0, f_1, f_2, f_3, \dots,\}$ satisfierar följande rekursiva formel

$$f_{n+2} = 2f_{n+1} + 8f_n, \qquad (*)$$

för alla $n \geq 0$. De två första termerna i talföljden är kända, $f_0 = a$ och $f_1 = b$. Uttryck f_{n+1} som en sluten formel i a och b. (Tips: Beteckna $F(n+1) = \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix}$ och skriv ekvationen (*) på matrisform). **(4 p)**

8. Betrakta följande två figurer. (Vid varje punkt anges dess koordinater i ett vanligt cartesiskt koordinatsystem.)



(a) Bestäm en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som transformerar den vänstra figuren till den högra. Du ska ange matrisen för T. **(2 p)**

(b) Bestäm arean för det inneslutna området i den högra figuren. **(2 p)**

9. Om A, B, C och D är kvadratiska matriser av samma storlek kan vi bilda en större kvadratisk matris som *blockmatrisen*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Antag att A är inverterbar och att matriserna A och C kommuterar med varandra, dvs att $AC = CA$. Visa att **(4 p)**

$$\det(M) = \det(AD - CB).$$

(Du kan använda fritt att om B eller C är noll-matrisen, då gäller att $\det(M) = \det(AD)$.)