KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 15.03.13

DEL A

1. Planet H ges av ekvationen $3x - 2y + 5z + 1 = 0$.
   a) Bestäm en linje N som är vinkelrät mot H. **(2 p)**
   b) Bestäm en linje L som inte skär planet H. **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Vi vet att vektorn $\vec{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ är vinkelrät mot planet H. Därmed vill varje linje på formen $\{P + t \cdot \vec{n} \mid \text{tal } t\}$ vara vinkelrät mot H, för varje vald punkt P. T.ex kan vi välja P som origo, och vi har att linjen $\begin{bmatrix} 3t \\ -2t \\ 5t \end{bmatrix}$ (parameter t) är vinkelrät mot H.

b) Vi väljer två punkt Q och R i planet, och bildar vektorn $\vec{v} = R - Q$. Då vill varje linje på formen $\{P + t\vec{v} \mid \text{tal } t\}$ vara parallell med planet H. Om vi sedan väljer punkten P att inte ligga i planet, har vi en linje som inte skär H. Vi väljer punkterna

$$Q = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad R = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

vilket ger $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Och vi väljer $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Detta ger oss linjen

$$\{\begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix} \mid \text{tal } t\}.$$

Svar.

2. Låt $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ vara standardbasen för $\mathbb{R}^3$. Betrakta den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ som är definierad genom

$$F(\vec{e_1}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, F(\vec{e_2}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad F(\vec{e_3}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm $F(\vec{v})$ där $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(1 p)**

(b) Bestäm dimensionen av nollrummet $\mathrm{Ker}(F)$, och bildrummet $\mathrm{Im}(F)$. **(2 p)**

(c) Bestäm en bas för nollrummet $\mathrm{Ker}(F)$. **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) Standardmatrisen för F är $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, så

$$F(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Standardmatrisen Gauss-reduceras till

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Man konstaterar att rangen av standardmatrisen är 2, vilket betyder att $\dim \mathrm{Im}(F) = 2$. Enligt dimensionssatsen är $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Im}(F) + \dim \mathrm{Ker}(F)$ och alltså är $\dim \mathrm{Ker}(F) = 1$.

(b) Eftersom $\dim \mathrm{Ker}(F) = 1$ utgör varje enskild vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ som uppfyller $F(\vec{v}) = 0$ en bas. Från (a) följer att $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas.

3. (a) Vad menas med begreppet egenvektor? **(1 p)**

(b) Avgör vilka vektorerna

$$\vec{x} = \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix}10\\-2\end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

som är egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix}1 & 5\\1 & 5\end{bmatrix}$. **(2 p)**

(c) Bestäm egenvärden och tillhörande egenrum till matrisen A. **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) Att $\vec{x}$ är en egenvektor till matrisen A betyder att $\vec{x}$ är nollskild och parallell med $A\vec{x}$, dvs att det finns en skalär λ så att $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

(b) För att se vilka av vektorerna som är egenvektorer multiplicerar vi dem med matrisen och ser om resultatet är parallellt med vektorn.
Vi får

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix}1 & 5\\1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 1 + 5\cdot 5\\1\cdot 1 + 5\cdot 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}26\\26\end{bmatrix} \quad \text{som inte är parallell med } \vec{x},$$

$$A\vec{y} = \begin{bmatrix}1 & 5\\1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 10 + 5\cdot(-2)\\1\cdot 10 + 5\cdot(-2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \text{som är parallell med } \vec{y},$$

$$A\vec{z} = \begin{bmatrix}1 & 5\\1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 1 + 5\cdot 1\\1\cdot 1 + 5\cdot 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\6\end{bmatrix} \quad \text{som är parallell med } \vec{z}$$

och

$$A\vec{w} = \begin{bmatrix}1 & 5\\1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 1 + 5\cdot(-1)\\1\cdot 1 + 5\cdot(-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\-4\end{bmatrix} \quad \text{som är inte parallell med } \vec{y}.$$

Alltså ser vi att $\vec{y}$ och $\vec{z}$ är egenvektorer, medan $\vec{x}$ och $\vec{w}$ inte är det.

(c) Från beräkningen i del (b) ser vi att $\vec{y}$ är en egenvektor med egenvärde 0 och $\vec{z}$ är en egenvektor med egenvärde 6. Eftersom det högt kan finnas två olika egenvärden måste dessa vara samtliga och motsvarande egenrum ges av multiplerna av vektorerna $\vec{y}$ och $\vec{z}$.

Svar.

(b) $\vec{y}$ och $\vec{z}$ är egenvektorer till A.

(a) Egenvärdena är 0 med egenrum $\mathrm{Span}\{\vec{y}\}$ och 6 med egenrum $\mathrm{Span}\{\vec{z}\}$.

DEL B

4. I $\mathbb{R}^4$ har vi, för varje tal a, följande tre vektorer

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ a \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Vi låter $V = \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ vara deras linjära hölje.

(a) Bestäm för vilka värden a vektorrummet V har dimension tre. **(2 p)**

(b) Låt $a = 1$, och bestäm en bas till det ortogonala komplementet $V^\perp$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

a) Vektorrummet V har dimension tre om (och endast om) vektorerna $\vec{v}_1$,$\vec{v}_2$ och $\vec{v}_3$ är linjärt oberoende. Detta är ekvivalent med att matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

har rang tre. Matrisens rang bestämmer vi med hjälp av elementära radoperationer.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & a-4 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & a-4 & -6 \\ 0 & 5 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6-3a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrisen A har rang 3 om (och endast om) $6 - 3a \neq 0$ dvs om $a \neq 2$. Därmed har V dimension 3 om $a \neq 2$.

b) Det ortogonala komplementet $V^\perp$ består av alla vektorer $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ som är ortogonala mot basvektorerna

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Detta betyder att $\vec{v}_1 \cdot \vec{u} = 0, \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{u} = 0$ och $\vec{v}_3 \cdot \vec{u} = 0$. Skriver vi ut detta erhåller vi det homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - w = 0 \\ 2x + y + z + 3w = 0 \\ 4x + 2y + 3z + 11w = 0. \end{cases}$$

Vi gör elementära radoperationer på totalmatrisen till systemet

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 3 & 11\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & -3 & 1 & 5\\ 0 & -6 & 3 & 15\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & -3 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 5\end{bmatrix}$$

Vi betecknar $w = t$ och får $z = -5t$, $y = 0$ och $x = t$. Alltså har vi att

$$V^{\perp} = \{t \begin{bmatrix}1\\ 0\\ -5\\ 1\end{bmatrix} \mid \text{tal} \quad t\}.$$

Härav följer att vektorn $\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -5\\ 1\end{bmatrix}$ är en bas till $V^{\perp}$.

Svar.

5. (a) Definiera vad som menas med *koordinatvektorn* för en vektor med avseende på en bas. **(1 p)**

   (b) Betrakta följande vektorer i $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   Bestäm en bas $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^2$ sådan att koordinatvektorn för $\vec{v}$ är $\vec{w}$ och koordinatvektorn för $\vec{w}$ är $\vec{v}$. **(3 p)**

Lösningsförslag. a) Låt $\beta = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ vara en bas för vektorrummet V, och låt $\vec{x}$ vara en vektor. Då kan $\vec{x}$ uttryckas som

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i,$$

för några skalärer $a_1, \ldots, a_n$. Den ordnade sekvensen av skalärer

$$[\vec{x}]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

kallas koordinatvektorn till $\vec{x}$ med avseende på basen β.

b) Låt $\{\vec{e}, \vec{f}\}$ vara den sökta basen för $\mathbb{R}^2$. Kraven är att $\vec{v} = \vec{e} - \vec{f}$ och att $\vec{w} = \vec{2} + 2\vec{f}$. Dessa två krav kan vi skriva som

$$\begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{f} \end{bmatrix}.$$

Inverterar vi 2×2-matrisen, får vi sambandet att

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{f} \end{bmatrix}.$$

Med andra ord har vi att

$$\vec{e} = \frac{2}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och

$$\vec{f} = -\frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Svar.

6. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ och $\vec{n} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ vara två nollskilda vektorer i $\mathbb{R}^2$, där $ac + bd = 0$. Låt L vara det linjära höljet till $\vec{v}$.
   (a) Varför är $\beta = \{\vec{v}, \vec{n}\}$ en bas för $\mathbb{R}^2$? **(1 p)**
   (b) Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara speglingen om linjen L. Bestäm matrisrepresentationen B till T med avseende på basen β. **(1 p)**
   (c) Låt P vara basbytesmatrisen från standardbasen till β. Bestäm $P^{-1}BP$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

a) Två vektorer i ett tvådimensionellt vektorrum bildar en bas om och endast om de är linjärt oberoende. Noll-skilda vektorerna $\vec{v}$ och $\vec{n}$ är ortogonala eftersom skalärprodukten $\vec{v} \cdot \vec{n} = ac + bd = 0$. Detta medför att $\vec{v}$ och $\vec{n}$ är två linjärt oberoende vektorer och därmed bildar de en bas i $\mathbb{R}^2$.

b) Vid speglingen i linjen $L = \mathrm{Span}(\vec{v})$ avbildas $\vec{v}$ på $\vec{v}$ och $\vec{n}$ på $-\vec{n}$. Från $T(\vec{v}) = \vec{v} = 1 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{n}$ och $T(\vec{n}) = -\vec{n} = 0 \cdot \vec{v} - 1 \cdot \vec{n}$ får vi att avbildningens matris i basen $\beta = \{\vec{v}, \vec{n}\}$ är $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

c) Matrisen $Q = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ är övergångsmatrisen från β till standardbasen. Därmed är $P = Q^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ övergångsmatrisen från standardbasen till β. Härav

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -c \\ b & -a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad+bc & -2ac \\ 2bd & -bc-ad \end{bmatrix}.$$

Anmärkning: Om $b \neq 0$ och vi substituerar $d = -ac/b$, kan vi förenkla svaret till

$$P^{-1}BP = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2-a^2 \end{bmatrix}.$$

c') Alternativt: Eftersom $P^{-1}BP$ är avbildningens matris i standardbasen kan vi beräkna matrisprodukten genom att avbilda en godtyckligt vektor. Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^2$. Vi har att

$$\vec{u} = \mathrm{proj}_L(\vec{u}) + (\vec{u} - \mathrm{proj}_L(\vec{u})).$$

Detta ger att $T(\vec{u}) = 2\,\mathrm{proj}_L(\vec{u}) - \vec{u}$. Vi har att linjen L spänns upp av vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, och vi erhåller att

$$T(\vec{u}) = 2\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\vec{v} - \vec{u} = 2\frac{ax+by}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2a^2x+2aby}{a^2+b^2} \\ \frac{2abx+2b^2y}{a^2+b^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & \frac{2ab}{a^2+b^2} \\ \frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Alltså är $\begin{bmatrix} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & \frac{2ab}{a^2+b^2} \\ \frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix}$ avbildningens matris i standard basen och därmed är

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & \frac{2ab}{a^2+b^2} \\ \frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix}.$$

DEL C

7. Talföljden $\{f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots,\}$ satisfierar följande rekursiva formel

$$f_{n+2} = 2f_{n+1} + 8f_n, \qquad (*)$$

för alla $n \geq 0$. De två första termerna i talföljden är kända, $f_0 = a$ och $f_1 = b$. Uttryck f_{n+1} som en sluten formel i a och b. (Tips: Beteckna $F(n+1) = \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix}$ och skriv ekvationen (*) på matrisform). **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi har att $F(n+1) = AF(n)$, där

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det följer då att $F(n+1) = A^n F(1)$. Om vi betraktar matrisen A som en linjär avbildning på $\mathbb{R}^2$, så har vi att $A = PDP^{-1}$ där P är övergångsmatrisen från en bas av egenvektorer till standardbasen, och där D är en diagonalmatris med egenvärden på diagonalen. Speciellt vill vi använda detta för att beräkna A^n.

Det karakteristiska polynomet till A är $c(\lambda) = (\lambda - 2)\lambda - 8$. Nollställerna är

$$0 = c(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 9 = (\lambda - 1)^2 - 9.$$

Det vill säga, $\lambda = -2$ och $\lambda = 4$. Vi bestämmer sedan de tillhörande egenrummen. För $\lambda = -2$ ges egenrummet av ekvationen $x + 2y = 0$. En bas är $\vec{e} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Egenrummet tillhörande egenvärdet $\lambda = 4$ ges av ekvationen $x - 4y = 0$. En bas är $\vec{f} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Detta ger övergångsmatriserna

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi har att

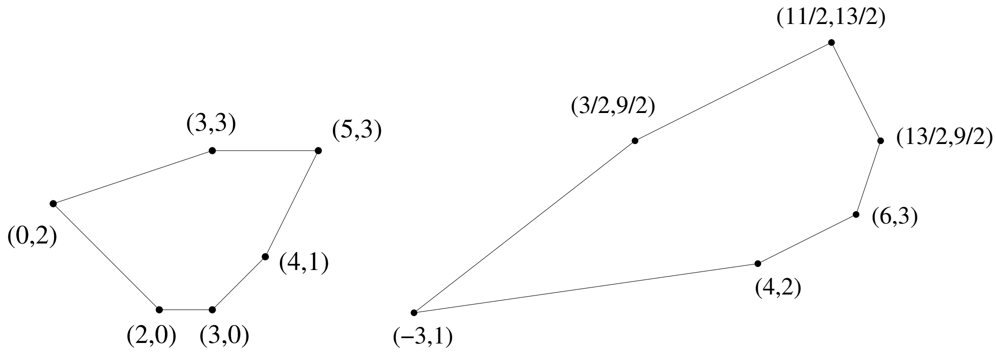
$$\begin{aligned}
A^n = PD^nP &= P\begin{bmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} P^{-1} \\
&= \frac{2^n}{6}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{2^{n-1}}{3}\begin{bmatrix} (-1)^n \cdot 2 & 4 \cdot 2^n \\ (-1)^{n+1} & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{2^{n-1}}{3}\begin{bmatrix} (-1)^n \cdot 2 + 4 \cdot 2^n & (-1)^{n+1} \cdot 8 + 8 \cdot 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n \cdot 4 + 2^{n+1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Vi har att $F(n+1) = A^n F(1)$, vilket ger att

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \frac{2^{n-1}}{3}\Big(\big((-1)^n \cdot 2 + 4 \cdot 2^n\big)b + \big((-1)^{n+1} \cdot 8 + 8 \cdot 2^n\big)a\Big) \\ &= \frac{2^n}{3}((-1)^n + 2^{n+1})b + \frac{2^{n+2}}{3}((-1)^{n+1} + 2^n)a. \end{aligned}$$

Svar.

8. Betrakta följande två figurer. (Vid varje punkt anges dess koordinater i ett vanligt cartesiskt koordinatsystem.)



(a) Bestäm en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som transformerar den vänstra figuren till den högra. Du ska ange matrisen för T. **(2 p)**

(b) Bestäm arean för det inneslutna området i den högra figuren. **(2 p)**

Lösningsförslag.

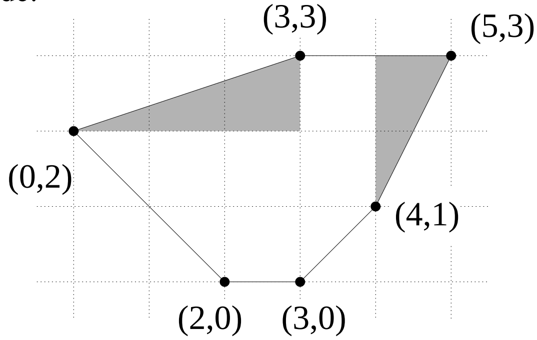
(a) Det gäller först att lista ut vilka punkter i den vänstra figuren som ska avbildas på vilka punkter i den högra figuren. Låt oss ge namn åt tre (ortsvektorer till) punkter i den vänstra figuren: $\vec{p} := \left[\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right]$, $\vec{q} := \left[\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right]$ och $\vec{r} := \left[\begin{smallmatrix}3\\0\end{smallmatrix}\right]$.
Eftersom $\vec{q} = \frac{2}{3}\vec{r}$ och T är linjär så måste $T(\vec{q}) = \frac{2}{3}T(\vec{r})$. Dom enda punkter i den högra figuren som uppfyller denna relation är $(4,2)$ och $(6,3)$ så vi måste ha $T(\vec{q}) = \left[\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}\right]$ och $T(\vec{r}) = \left[\begin{smallmatrix}6\\3\end{smallmatrix}\right]$. I den vänstra figuren är $\vec{p}$ granne till $\vec{q}$, så vi vill att $T(\vec{p})$ ska vara granne till $T(\vec{q})$ och då måste $T(\vec{p}) = \left[\begin{smallmatrix}-3\\1\end{smallmatrix}\right]$.
Ekvationerna $T(\left[\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right]) = \left[\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}\right]$ och $T(\left[\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right]) = \left[\begin{smallmatrix}-3\\1\end{smallmatrix}\right]$ ger tillsammans att matrisen för T måste vara

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -3\\2 & 1\end{bmatrix}.$$

En kontroll visar att A avbildar även dom andra punkterna korrekt:

$$A\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/2\\9/2\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11/2\\13/2\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13/2\\9/2\end{bmatrix}.$$

(b) Om vi ritar in några hjälplinjer i den vänstra figuren blir det lätt att beräkna arean av dess inneslutna område.



Dom skuggade trianglarna har arean $3/2$ och 1, och den resterande arean är $5+\frac{3}{2}$. Alltså blir den totala arean av det vänstra området $\frac{3}{2}+1+5+\frac{3}{2}=9$. Determinanten av A är $(1/2)^2\cdot(4\cdot 1-(-3)\cdot 2)=5/2$ så det högra området har arean $9\cdot\frac{5}{2}=45/2$.

9. Om A, B, C och D är kvadratiska matriser av samma storlek kan vi bilda en större kvadratisk matris som *blockmatrisen*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Antag att A är inverterbar och att matriserna A och C kommuterar med varandra, dvs att $AC = CA$. Visa att **(4 p)**

$$\det(M) = \det(AD - CB).$$

(Du kan använda fritt att om B eller C är noll-matrisen, då gäller att $\det(M) = \det(AD)$.)

Lösningsförslag. Då matrisen A^{-1} existerar kan vi konstruera matrisen

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A^{-1}C & I \end{bmatrix},$$

där I är identitetsmatrisen, och 0 är noll-matrisen. Båda av samma storlek som matriserna A, B, C och D. Den konstruerade matrisen har uppenbarligen determinant 1. Detta betyder att matrisen, som ges av produkten,

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A^{-1}C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

har den sökta determinanten $\det(M)$. När vi beräknar produkten ovan erhåller vi matrisen

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -A^{-1}CA + C & -A^{-1}CB + D \end{bmatrix}.$$

Vi använder nu att $CA = AC$. Blocket längst ned till vänster blir då $-A^{-1}CA + C = -A^{-1}AC + C = -C + C = 0$. Vi använder sedan att vi känner till determinanten för blockmatriser där ena blocket är noll, dvs att

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & -A^{-1}CB + D \end{bmatrix}\right) = \det(A)\det(-A^{-1}CB + D).$$

Detta betyder att den sökta determinanten är $\det(M) = \det(A)\det(-A^{-1}CB + D)$. Vi vet från kursen att determinanten bevarar produkt, så

$$\det(A)\det(-A^{-1}CB + D) = \det(A(-A^{-1}CB + D)) = \det(-CB + AD).$$

Och då $-CB + AD = AD - CB$ har vi visat påståendet.