



KTH Informations- och
kommunikationsteknik

Tentamen i IE1304 Reglerteknik Måndag 16/3 2015 9.00-13.00

Allmän information

Examinator: William Sandqvist.

Ansvarig lärare: William Sandqvist, tel 08-790 4487 (Campus Kista),
Tentamensuppgifterna behöver inte återlämnas när du lämnar in din skrivning.

Hjälpmedel: Räknares/Grafräknares. Kursens formelblad har bifogats tentamen.

Tentamens omfattning

Information om rättning och betyg

Motivera alla svar.

Tabeller och beräkningar som använts ska finnas med i lösningarna i läsbar form. Om svaret på en fråga är "42" så måste du också tala om varför.

Ofullständigt motiverade svar ger *inte* full poäng!

Tentamen kan ge maximalt 50 p (denna gång 56p), godkändgränsen går vid 25 p.
Vid detta **ordinarie tentamenstillfälle** kan upp till 6 extra poäng läggas till från denna **kursomgångs** tre seminarier (2+2+2). Totalt 56p.

0 –	25 –	30 –	35 –	40 –	45–
F	E	D	C	B	A

Resultatet meddelas senast måndag den 6 april.

1. 2p

a) Vilken överföringsfunktion $\frac{Y}{X}$ har denna differentialekvation?

$$y'' - 3y' + 2y = 3x' + x$$

b) Vilken överföringsfunktion $\frac{Y}{X}$ har denna PID-regulator?

$$y = x + 5 \int x dt + 2\dot{x}$$

2. 2p

Vilket stegsvar har följande överföringsfunktion? Använd Laplacetransform tabellen.
 $x(t > 0) = 1$. $y(t) = ?$

$$G(s) = \frac{Y}{X} = \frac{1}{s^2 + 4}$$

3. 2p

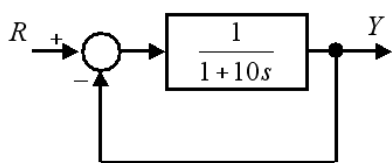
Partialbråksutveckla följande polynom

$$G(s) = \frac{9 - 3s}{(s+1)(s+7)}$$

4. 4p

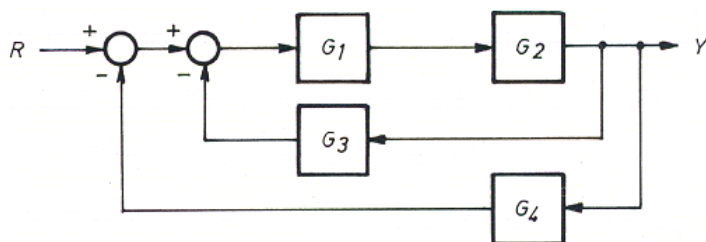
a) Feedback. En process har överföringsfunktionen $\frac{1}{1+10s}$.

Den återkopplas enligt figuren. Vad blir överföringsfunktionen för $\frac{Y}{R}$?



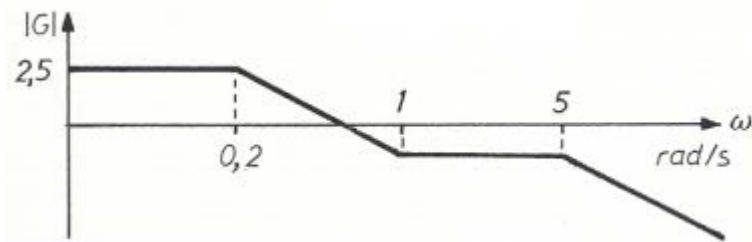
b) Blockschemareduktion.

Reducera blockschemat till överföringsfunktionen för $\frac{Y}{R}$ så långt det går.



5. 2p

Bodediagram. Ange den överföringsfunktion som överensstämmer med följande Bode-diagram. Där kurvan lutar är lutningen 1 dekad/dekad.



6. 2p

a) Är detta en stabil överföringsfunktion? Motivera svaret!

$$\frac{s^2 + 3s + 2}{s + 4}$$

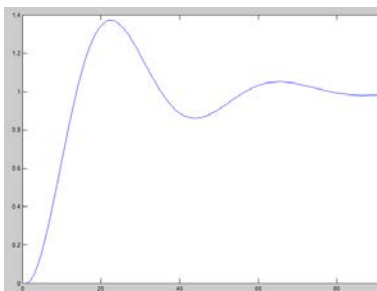
b) Rooth Hurwitz metod. Använd metoden för att avgöra om nämnarpolynomet är stabilt.

$$s^3 + 2s^2 + s + 1$$

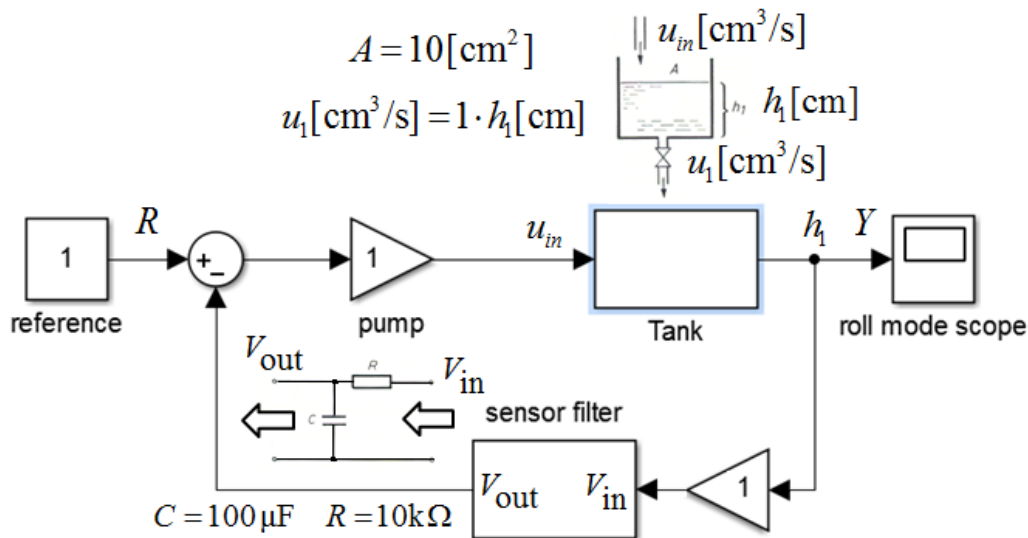
7. 2p

Risetime och settlingtime.

Markera i figuren (på svarsbladet, lämna in detta) hur man mäter risetime t_r och hur man mäter settlingtime t_s ($\pm 10\%$).



8. 6p



En skola har en labutrustning med en tank som fylls med en pump. Se figuren. En trycksensor med ett RC-filtret mäter vätskehöjden i tanken.

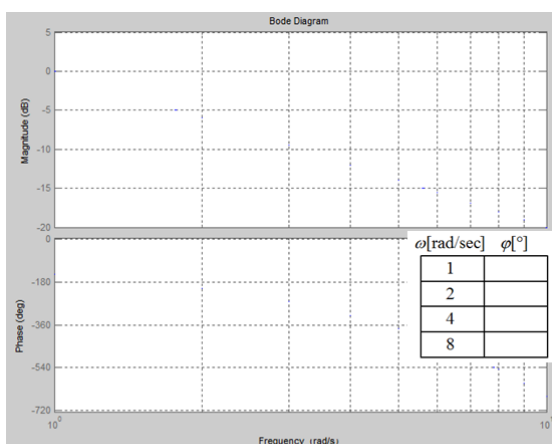
Tanken har tvärsnittsarean $A = 10 \text{ cm}^2$. Mellan höjden i tanken och utflödet råder sambandet $u_1 = 1 \cdot h_1$. Sensor filtret består av $R = 10 \text{ k}\Omega$ och $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$ och har statiska förstärkningen 1. Pumpen har förstärkningen 1.

Tag fram överföringsfunktionen $\frac{Y}{R}$ från referensstorhet till utstorhet.

9. 8p

En process har överföringsfunktionen $G_p(s) = \frac{e^{-s}}{s}$.

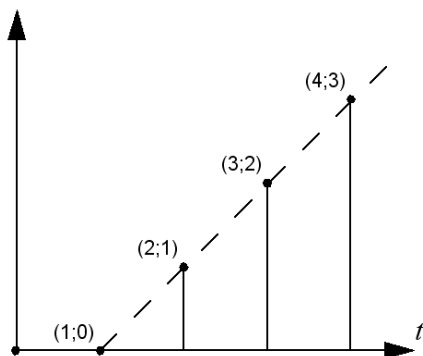
Rita överföringsfunktionens Bodediagram (på svarsbladet, lämna in detta). Gradera ω -axeln. Rita beloppsfunktionen. Beräkna fasfunktionen ϕ för ω 1, 2, 4, 8. Skissa den i diagrammet. Beräkna $\Phi_m = ?$ $A_m = ?$ $\omega_\pi = ?$ $\omega_C = ?$ $t_r \approx ?$ $e_0 = ?$



$\omega_C = ?$ $\omega_\pi = ?$ $A_m = ?$ $\Phi_m = ?$ $e_0 = ?$ $t_r \approx ?$

10. 2p

- a) Bestäm z-transformen för denna tidsdiskreta signal.
Ange den på både negativ och positiv form.



- b) Bestäm tidsdiskreta motsvarigheten till

$$G(s) = 1 \quad G(s) = \frac{5}{s}$$

11. 2p

Avgör om nedanstående system är stabilt.

$$H(z) = \frac{555z^2}{z^3 - 5z^2 + 25z + 125}$$

12. 8p

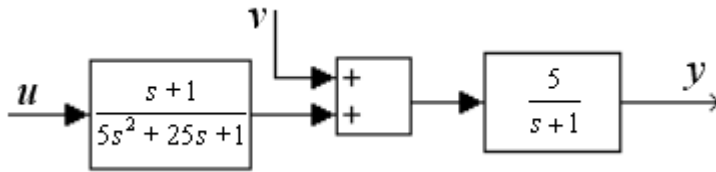
En process ska regleras med icke-integrerande polplacerings regulator. Processen beskrivs med följande differensekvation

$$y[k] = 0,5y[k-1] + 5u[k-1] + 5u[k-2]$$

- Bestäm överföringsfunktionen (1p)
- Dimensionera regulatorn och anta att alla poler ska ligga i $z = 0,5$. (3p)
- Rita blockschema för hela systemet. (1p)
- Vilka ändringar behövs för att transformera ovanstående polplacerings regulator till dead-beat regulator? Skriv ner överföringsfunktionen för denna dead-beat regulator. (2p)
- Jämför kvalitativt dead-beat regulatorn med ursprungliga regulatorn. (1p)

13. 6p

En process beskrivs med nedanstående blockschema. Processen kan beskrivas på tillståndsform med två tillstånd x_1 och x_2 . Signalen u är styrsignal, v är reglerad storhet och y är mätsignal.



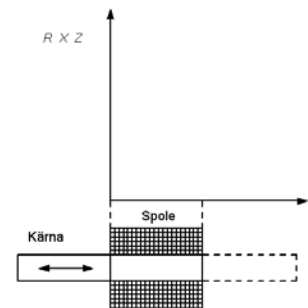
- ställ upp systemet på tillståndsform. Välj styrbar kanonisk form. (4p)
- beräkna stationärvärde av tillståndssystemet från a). Använd enhetssteg för u och v . (2p)

14. 2p

En spole används för att beröringsfritt mäta positionen hos en järnkärna. Kärnan förs först in i spolen från ena hållet och fortsätter sedan ut genom andra änden.

Skissa hur spolens resistans R , reaktans X och impedans Z varierar med järnkärnans position.

Rita de tre kurvorna (på svarsbladet, lämna in detta).



Lycka till!

Formelblad vid tentamen i Reglerteknik IE1304

Regulator typer

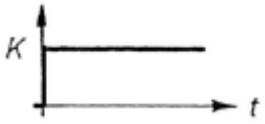
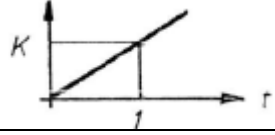
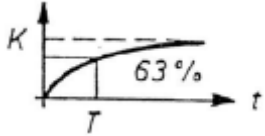
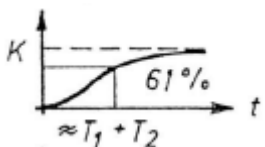
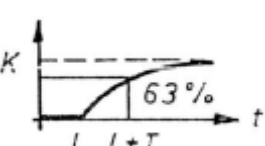
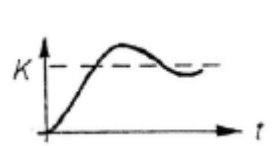
Regulator	Funktion	Överföringsfunktion $G(s)$
P-regulator	$u(t) = u_0 + K \cdot e(t)$	$G(s) = K$
I-regulator	$u(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt$	$G(s) = \frac{1}{T_I s}$
D-länk	$u(t) = T_D \frac{de(t)}{dt}$	$G(s) = T_D \cdot s$
PID-regulator	$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right)$	$G(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$
$u(k) = K \left(e(k) + \frac{h}{T_I} \sum_{i=0}^k e(i) + T_D \frac{e(k) - e(k-1)}{h} \right)$ Diskret PID, förutsätter hög samplingsfrekvens		
$h =$ samplingsperiod $K =$ förstärkning $T_I =$ integreringstid $T_D =$ deriveringstid		

Laplace transformtabell

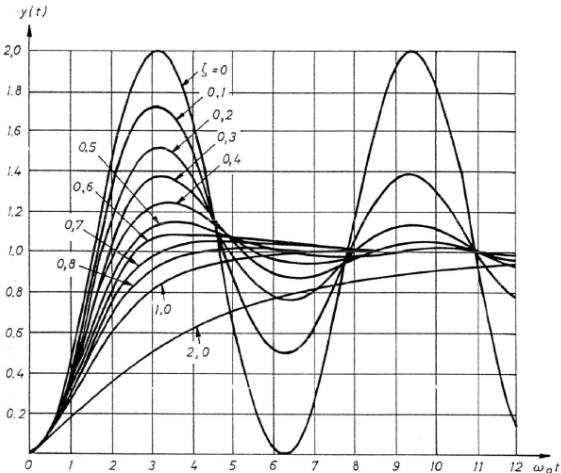
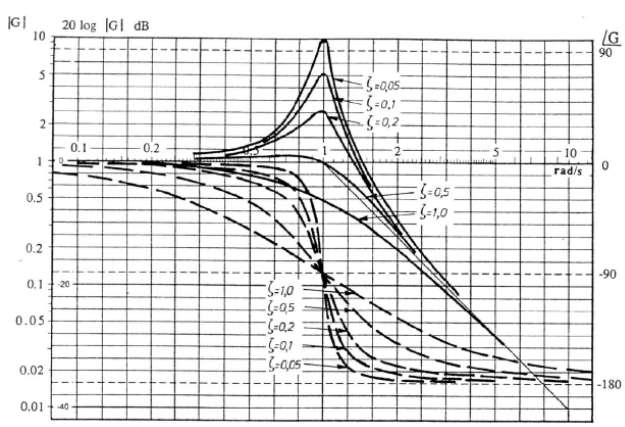
Laplace transform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t) \ t > 0$	Laplace transform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t) \ t > 0$
1	$\delta(t)$ impulsfunktionen	$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$ stegfunktionen
$\frac{1}{s^2}$	$1 \cdot t$ rampfunktionen	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$
$\frac{1}{s(1+as)}$	$1 - e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{s(1+as)(1+bs)}$	$1 - \frac{a \cdot e^{-at}}{a-b} - \frac{b \cdot e^{-bt}}{b-a}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \cdot \sin at$
$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^2} [1 - \cos at]$
$\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \cdot \cos bt$	$\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \cdot \sin bt$
Dämpningsatsen: $e^{-\alpha t} \cdot f(t) \Leftrightarrow F(s+\alpha)$ Fördröjningssatsen: $f(t-T) \cdot \sigma(t-T) \Leftrightarrow e^{-sT} \cdot F(s)$ Begynnelsevärdessatsen: $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$ Slutvärdessatsen: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s \cdot F(s)$			

Deriveringssatsen: $L[f'(t)] = s \cdot F(s) - f(0)$
Integrationssatsen: $L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s} \cdot F(s)$
Superpositionsregeln: $L[a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)] = a \cdot F_1(s) + b \cdot F_2(s)$

Samband mellan stegsvar och överföringsfunktion

P-verkan $G(s) = K$		Integration $G(s) = \frac{K}{s}$	
En tidkonstant $G(s) = \frac{K}{1+Ts}$		Integration+tidkonstant $G(s) = \frac{K}{s(1+Ts)}$	
Två tidkonstanter $G(s) = \frac{K}{(1+T_1s)(1+T_2s)}$		Integration+dödtid $G(s) = \frac{K \cdot e^{-Ls}}{s}$	
En tidkonstant+dödtid $G(s) = \frac{K \cdot e^{-Ls}}{1+Ts}$		Andra ordningens process med översväng $G(s) = \frac{K}{as^2 + bs + 1}$	

Andra ordningens system med komplexa rötter

 <i>Linjärt</i>	 <i>Bode-diagram</i>
ω_0 odämpade systemets egensvängning ζ relativ dämpning M_p maximal översväng t_p tiden för maximal översväng	$G(s) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$ $M_p = e^{-\frac{\zeta \cdot \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}$

Blockschema reduktions regler

Fysikaliska modeller

Mekaniska system	Elektriska system
Massa $\sum F = M \frac{d^2 x}{dt^2}$ (Newtons andra lag) Fjäder $F = k \cdot x$ (k = fjäderkonstant) Dämpare $F = b \frac{dx}{dt}$ (b = dämpkonstant)	Resistor $\frac{U}{I} = R$ (R = resistans) Kondensator $\frac{U}{I} = \frac{1}{C \cdot s}$ (C = kapacitans) Spole $\frac{U}{I} = L \cdot s$ (L = induktans)
Termisk process	Nivåreglering
Energibalans $\frac{dE}{dt} = P_{in} - P_{ut}$ Värmeenergi $E = T \cdot V \cdot c \cdot \rho$ T temperatur [K] V volym [m^3] c värmekapacitet [J/K·kg] ρ densitet [kg/m^3]	Materialbalans $\frac{dV}{dt} = u_{in} - u_{ut}$ V volym [m^3] u_{in} inflöde [m^3/s] u_{ut} utflöde [m^3/s]

Frekvensanalys

$G(s)$

$A(\omega) = |G(j\omega)| \quad \varphi(\omega) = \arg(G(j\omega)) \quad \angle G(j\omega) \quad PHASOR \quad A \angle \varphi$

Bodediagram för grundfaktorer

Förstärkning $G(s) = K$ $ G(j\omega) = K$ $\arg(G(j\omega)) = 0^\circ$		Integrering $G(s) = \frac{1}{s}$ $ G(j\omega) = \frac{1}{\omega}$ $\arg(G(j\omega)) = -90^\circ$	
Derivering $G(s) = s$ $ G(j\omega) = \omega$ $\arg(G(j\omega)) = +90^\circ$		Dödtid $G(s) = e^{-L \cdot s}$ $ G(j\omega) = 1$ $\arg(G(j\omega)) = -\omega \cdot L \frac{180^\circ}{\pi}$	
Tidkonstant nämnare $G(s) = \frac{1}{1+Ts}$ $ G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}$ $\arg(G(j\omega)) = -\arctan T\omega$		Tidkonstant täljare $G(s) = \frac{1+Ts}{1}$ $ G(j\omega) = \frac{\sqrt{1+(T\omega)^2}}{1}$ $\arg(G(j\omega)) = \arctan T\omega$	
$G(s) = \frac{1}{1+2\zeta Ts + T^2 s^2} \quad G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2}} \quad \arg(G(j\omega)) = -\arctan\left(\frac{2\zeta T\omega}{1-T^2\omega^2}\right)$			

PI och PD-regulatorernas Bodediagram

PI-regulatorns Bodediagram	PD-regulatorns Bodediagram

PI-regulator. Dimensionera med fasmarginal $\phi_m + 11^\circ$. Regulatorns Bodediagram placeras med sitt $5\omega_b$ vid $\phi_m + 11^\circ$. Totalt uppnås då den önskade fasmarginalen ϕ_m .

Stabilitet

Nyquist förenklade stabilitets kriterium för öppna systemet. Stabilt om:

$$|G(j\omega)| < 1 \quad \text{vid} \quad \arg(G(j\omega)) = -180^\circ$$

Algebraiskt. Stabilt om: Slutna systemets poler ligger i vänstra halvplanet.

Stabilitetsmarginaler

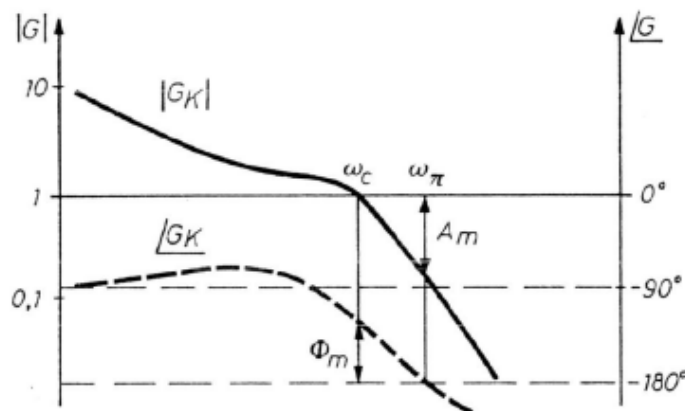
ω_π självsvängningsfrekvens där

$$\arg(\underline{G}(j\omega)) = -180^\circ$$

ω_c crossover frekvens där $|\underline{G}(j\omega)| = 1$

A_m amplitud marginal $A_m = \frac{1}{|\underline{G}(\omega_\pi)|}$

ϕ_m fasmarginal $\phi_m = 180^\circ + \arg(\underline{G}(j\omega_c))$



Routh Hurwitz metod

Karakteristisk ekvation:

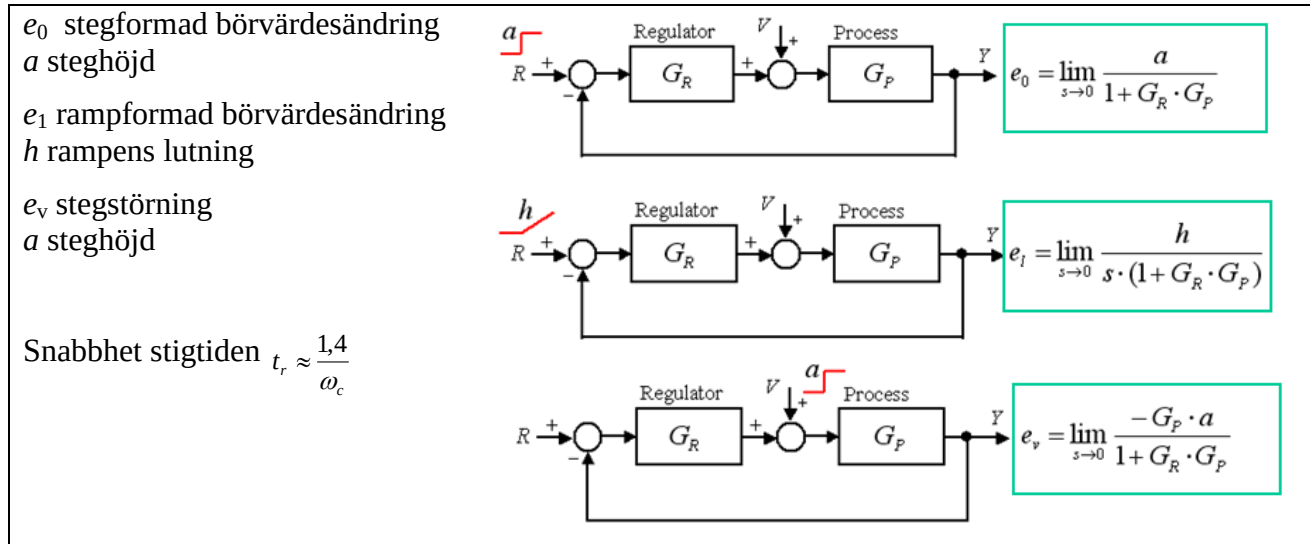
$$B_0 s^n + B_1 s^{n-1} + B_2 s^{n-2} + \dots + B_n = 0 \quad B_0 > 0$$

Talschema:

s^n	B_0	B_2	B_4	B_6	$\dots$	där	$C_0 = \frac{B_1 B_2 - B_0 B_3}{B_1}$
s^{n-1}	B_1	B_3	B_5	B_7	$\dots$		$C_1 = \frac{B_1 B_4 - B_0 B_5}{B_1}$
s^{n-2}	C_0	C_1	C_2	$\dots$			$C_2 = \frac{B_1 B_6 - B_0 B_7}{B_1}$
s^{n-3}	D_0	D_1	D_2	$\dots$			
$\vdots$	$\vdots$						
s^0							$D_0 = \frac{C_0 B_3 - B_1 C_1}{C_0}$
							etc

Om alla tal i första kolumnen är positiva har karakteristiska ekvationen alla rötter i vänster halvplan.

Kvarstående reglerfel, statisk noggrannhet



Ziegler-Nichols metod för PID-inställning

K_0 är den förstärkning då självsvängning uppkommer vid P reglering.

$$K_0 = \frac{1}{|G(\omega_\pi)|} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_\pi}$$

	K	T_I	T_D
P :	$0,5 \cdot K_0$	—	—
PI :	$0,45 \cdot K_0$	$0,85 \cdot T_0$	—
PID :	$0,6 \cdot K_0$	$0,5 \cdot T_0$	$0,125 \cdot T_0$

Lambdametoden för PI-inställning

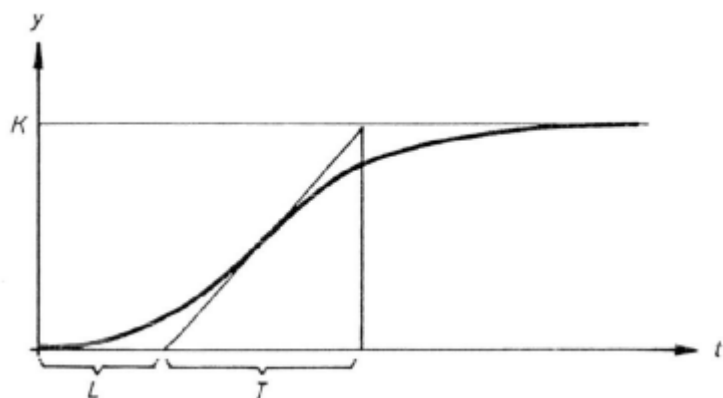
Vid lambdametoden mäts stegsvaret från det öppna systemet och jämförs med stegsvaret från en process med en tidkonstant T och dödtid L .

$$G(s) = \frac{K \cdot e^{-Ls}}{1 + Ts}$$

L uppskattas med hjälp av tangentens skärning med tidaxeln.

T uppskattas ur triangeln i figuren, eller som tiden efter dödtiden L , fram till 63% av slutvärdet.

$$K = \frac{T}{K_s(\lambda + L)} \quad T_I = T$$



$$M = \max\{L, T\} \quad \lambda = p \cdot M$$

$$1 < p < 3 \quad (\text{speed} \leftarrow p \rightarrow \text{stability})$$

z-transformtabell

Tidsdiskret funktion $f(k)$	z-transform $F(z)$ pos repr.	z-transform $F(z)$ neg repr.
$P_e(k)$ enhetspuls	1	
$S_e(k)$ enhetssteg	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$f(k) = 1 \cdot k$ enhetsramp	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$f(k) = (1 \cdot k)^2$ enhetsparabel	$\frac{z^2 + z}{(z-1)^3}$	$\frac{z^{-1} + z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$
$f(k) = a^k$ exponentialfunktion	$\frac{z}{z-a}$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
$P_e(k-L)$ fördröjd puls	$\frac{1}{z^L}$	z^{-L}
$S_e(k-L)$ fördröjt steg	$\frac{z^{1-L}}{z-1}$	$\frac{z^{-L}}{1-z^{-1}}$
$f(k) = e^{-ak}$	$\frac{z}{z-e^{-a}}$	$\frac{1}{1-e^{-a}z^{-1}}$
$f(k) = \sin \omega k$	$\frac{z \cdot \sin \omega}{z^2 - (2 \cos \omega)z + 1}$	$\frac{z^{-1} \cdot \sin \omega}{1 - (2 \cos \omega)z^{-1} + z^{-2}}$
$f(k) = \cos \omega k$	$\frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - (2 \cos \omega)z + 1}$	$\frac{z^{-1}(1 - z^{-1} \cos \omega)}{1 - (2 \cos \omega)z^{-1} + z^{-2}}$
$f(k) = 1 - e^{-ak}$	$\frac{z(1 - e^{-a})}{(z-1)(z - e^{-a})}$	$\frac{(1 - e^{-a})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-a}z^{-1})}$
Superpositionsregeln: $Z[a \cdot f_1(k) + b \cdot f_2(k)] = a \cdot F_1(z) + b \cdot F_2(z)$ Förskjutningssatsen: $Z[f(k-L)] = F(z) \cdot z^{-L}$ Begynnelse och slutvärdessatserna: $f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(z)$ $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot F(z)$		

Diskretisering

Diskretisering med formel

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[L^{-1} \left(G(s) \cdot \frac{1}{s} \right)_{t=kh} \right] \quad h \text{ är samplingsperioden. Steginvariant transform.}$$

Diskretisering med tabell

Kontinuerlig process $G(s)$	Diskretiserad process $H(z)$
$\frac{K}{1 + Ts}$	$\frac{K(1 - e^{-h/T})}{z - e^{-h/T}} = \frac{K(1 - e^{-h/T})z^{-1}}{1 - e^{-h/T}z^{-1}}$
$\frac{K}{s}$	$\frac{K \cdot h}{z - 1} = \frac{K \cdot h \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}}$
e^{-ks}	z^{-1}
$\frac{K}{s(1 + Ts)}$	$KT \cdot \frac{(e^{-h/T} - 1 + \frac{h}{T})z^{-1} + (1 - e^{-h/T}(1 + \frac{h}{T}))z^{-2}}{1 - (1 + e^{-h/T})z^{-1} + e^{-h/T}z^{-2}}$
$\frac{K}{s^2 + a^2}$	$\frac{K(1 - \cos ah)}{a^2} \cdot \frac{(z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 2 \cos ah z^{-1} + z^{-2})}$
$\frac{K}{s^2}$	$\frac{Kh^2}{2} \cdot \frac{(z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 2 z^{-1} + z^{-2})}$

Lineär algebra några formler

Multiplikation av 2×2 -matriser:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Enhetsmatrisen:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invertering av en 2×2 -matris:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Determinanten för en 2×2 -matris:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Minsta kvadratmetoden

Överbestämt ekvationssystem $y = A \cdot r$

Felutjämnat $A^T y = (A^T A)r \Rightarrow r = (A^T A)^{-1} A^T y$ Matlab **r = A \ y**

y utsignalvektor

A mätdata matrisen

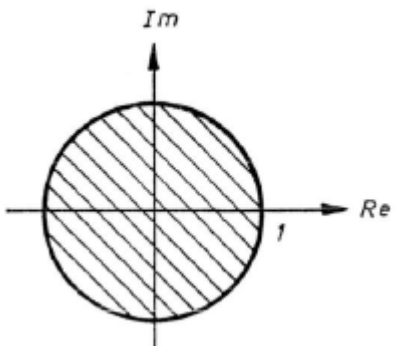
r parametervektor

Diskret frekvensanalys

$$H(z) \quad A(\omega) = |H(e^{j\omega h})| \quad \varphi(\omega) = \arg(H(e^{j\omega h})) \quad K_{LF} = H(1) \quad f_s = \frac{1}{h} \quad f_s \geq 2 \cdot f$$

Samplingsfrekvensen måste vara minst dubbelt så hög som högsta insignal frekvensen för att undvika vinkningsdistorsion.

Diskret stabilitet

 För stabilitet ska överföringsfunktionen $H(z)$ ha alla poler inom enhetscirkeln.	Schur-Coons stabilitetskriterium (motsvarar Routh Hurwitz). Karakteristisk ekvation: $A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n \quad a_0 > 0$ Talschema: $b_i = a_0 a_i - a_n a_{n-i} \quad 0 \leq i \leq n-1$ $c_i = b_0 b_i - b_{n-1} b_{n-1-i} \quad 0 \leq i \leq n-2$ $d_i = c_0 c_i - c_{n-2} c_{n-2-i} \quad 0 \leq i \leq n-3$... Stabilt om $a_0, b_0, c_0, \dots$ alla är positiva
---	---

Kvarstående reglerfel, statisk noggrannhet

e_0 stegformad börvärdesändring
$$e_0 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{a}{1 + H_R H_P}$$

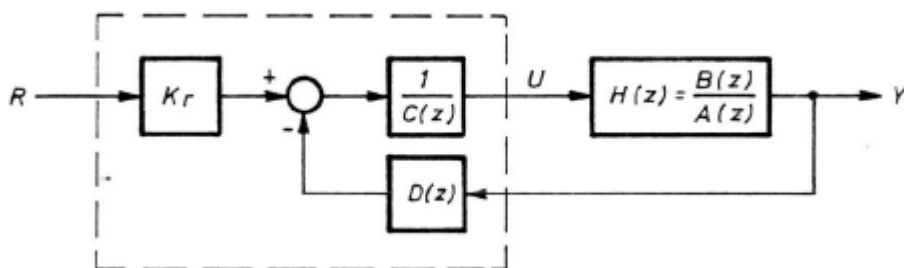
a steghöjd

e_1 rampformad börvärdesändring
$$e_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{h}{(z-1)(1 + H_R H_P)}$$

h rampens lutning

e_v stegstörning a steghöjden
$$e_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-H_P a}{1 + H_R H_P}$$

Polplaceringsregulator



$$P(z) = (1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_n z^{-1})$$

$A(z)C(z) + B(z)D(z) = P(z)$ vid integrering $(1 - z^{-1})$ i C , under beräkningen enklast i A .

$$n_p \leq n_a + n_b - 1 \quad n_c = n_b - 1 \quad n_d = n_a - 1$$

$$C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}$$

$$D(z) = d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_{n_d} z^{-n_d}$$

$$K_r = \frac{P(1)}{B(1)}$$

Tillståndsmodeller för kontinuerliga system

Systembeskrivning: $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ $y = \mathbf{Cx}$

A systemmatris **B** insignalmatris **C** utsignalmatris **D** direktmatris

Generell form för enkelvariabla system

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \cdot u \quad y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + [d] \cdot u$$

Generell form för flervariabla system. n tillståndsvariabler, p insignaler, q utsignaler.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Diagonalform

$$G(s): \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} \equiv \frac{\beta_1}{s - \lambda_1} + \frac{\beta_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{\beta_n}{s - \lambda_n}$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \cdot u \quad y = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Styrbar kanonisk form

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \quad y = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Transformera tillståndsmodell till överföringsfunktion

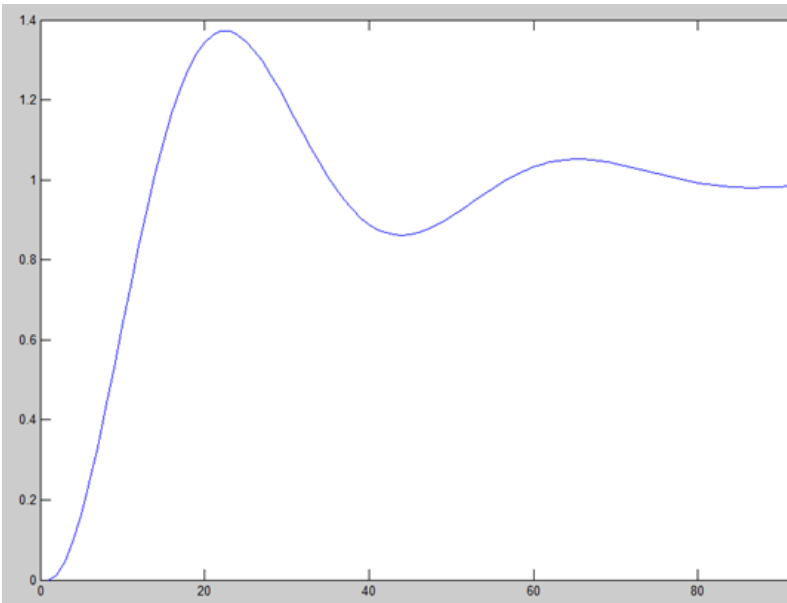
$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad y = \mathbf{Cx} \quad \{L:\} \quad s\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU} \quad Y = \mathbf{CX}$$

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

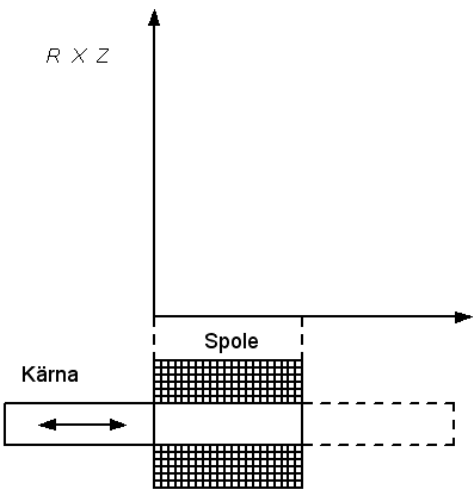
Figurblad till uppgifterna 7, 9, 14

Efternamn: _____ Förnamn: _____

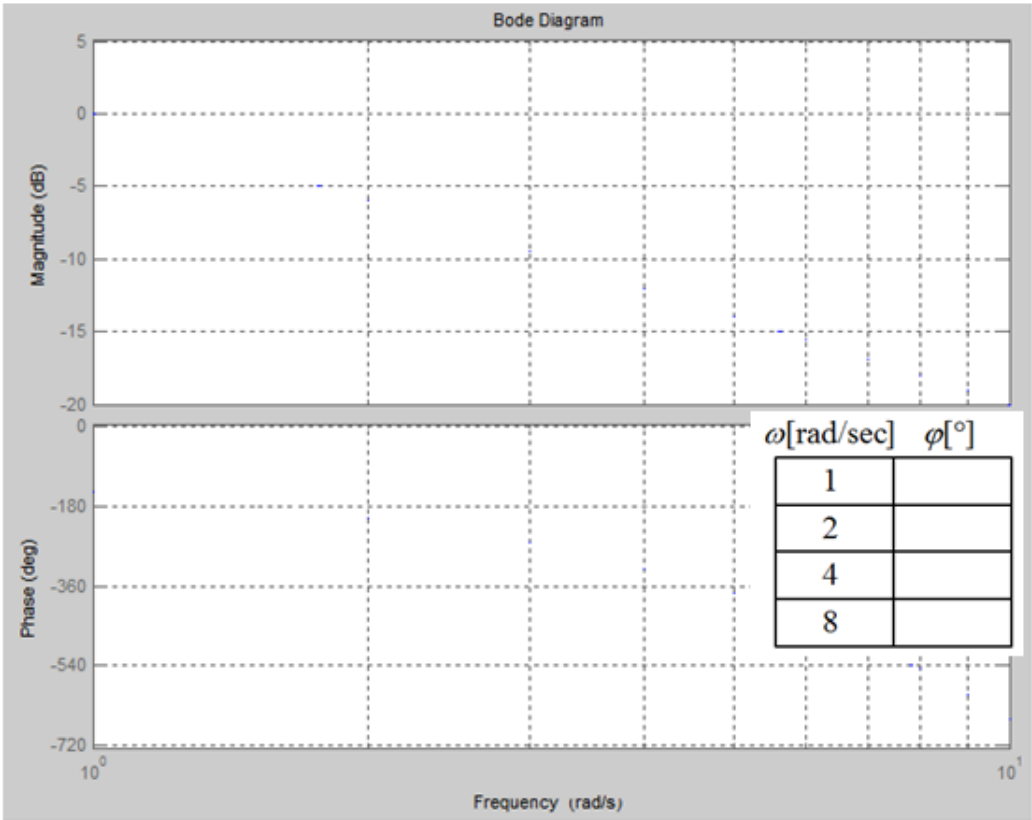
Personnummer: _____



Uppg. 7. t_r t_s ($\pm 10\%$)



Uppg. 14. $R \times Z$



$\omega_C = ? \quad \omega_\pi = ? \quad A_m = ? \quad \Phi_m = ? \quad e_0 = ? \quad t_r \approx ?$

Uppg 9.