



KTH Informations- och
kommunikationsteknik

Tentamen med lösningar i IE1304 Reglerteknik Måndag 16/3 2015 9.00-13.00

Allmän information

Examinator: William Sandqvist.

Ansvarig lärare: William Sandqvist, tel 08-790 4487 (Campus Kista),
Tentamensuppgifterna behöver inte återlämnas när du lämnar in din skrivning.

Hjälpmedel: Räknares/Grafräknares. Kursens formelblad har bifogats tentamen.

Tentamens omfattning

Information om rättning och betyg

Motivera alla svar.

Tabeller och beräkningar som använts ska finnas med i lösningarna i läsbar form. Om svaret på en fråga är "42" så måste du också tala om varför.

Ofullständigt motiverade svar ger *inte* full poäng!

Tentamen kan ge maximalt 50 p (denna gång 56p), godkändgränsen går vid 25 p.

Vid detta **ordinarie tentamenstillfälle** kan upp till 6 extra poäng läggas till från denna **kursomgångs** tre seminarier (2+2+2). Totalt 56p.

0 –	25 –	30 –	35 –	40 –	45–
F	E	D	C	B	A

Resultatet meddelas senast måndag den 6 april.

1. 2p

a) Vilken överföringsfunktion $\frac{Y}{X}$ har denna differentialekvation?

$$y'' - 3y' + 2y = 3x' + x$$

b) Vilken överföringsfunktion $\frac{Y}{X}$ har denna PID-regulator?

$$y = x + 5 \int x dt + 2\dot{x}$$

Svar:

$$a) \quad L[y'' - 3y' + 2y] = L[3x' + x] \Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{3s + 1}{s^2 - 3s + 2}$$

$$b) \quad L[y] = L\left[x + 5 \int x dt + 2\dot{x}\right] \Leftrightarrow Y = X + \frac{5}{s}X + 2sX$$

$$\frac{Y}{X} = 1 + \frac{5}{s} + 2s$$

2. 2p

Vilket stegsvar har följande överföringsfunktion? Använd Laplacetransform tabellen.
 $x(t > 0) = 1$. $y(t) = ?$

$$G(s) = \frac{Y}{X} = \frac{1}{s^2 + 4}$$

Svar:

$$Y = G(s)X \quad X = L[\text{unitstep}] = \frac{1}{s}$$

$$Y = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s^2 + 4)} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)$$

3. 2p

Partialbråksutveckla följande polynom

$$G(s) = \frac{9 - 3s}{(s + 1)(s + 7)}$$

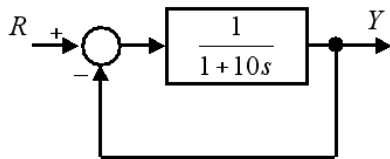
Svar:

$$\frac{9 - 3s}{(s + 1)(s + 7)} = \frac{\frac{9 - 3(-1)}{(-1) + 7}}{s + 1} + \frac{\frac{9 - 3(-7)}{(-7) + 1}}{s + 7} \quad G(s) = \frac{2}{s + 1} + \frac{5}{s + 7}$$

4. 4p

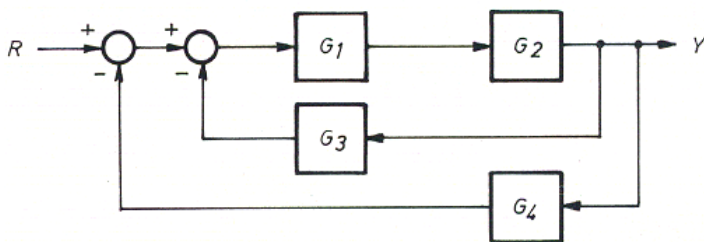
a) Feedback. En process har överföringsfunktionen $\frac{1}{1+10s}$.

Den återkopplas enligt figuren. Vad blir överföringsfunktionen för $\frac{Y}{R}$?



b) Blockschemareduktion.

Reducera blockschemat till överföringsfunktionen för $\frac{Y}{R}$ så långt det går.



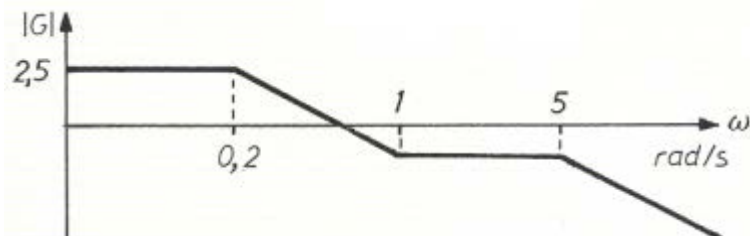
Svar:

$$a) \quad G_1 = \frac{1}{10s+1} \quad G_2 = 1 \quad G_{closedloop} \left(\frac{Y}{R} \right) = \frac{G_1}{1 + G_1 \cdot G_2} = \frac{\frac{1}{10s+1}}{1 + \frac{1}{10s+1} \cdot 1} = \frac{1}{10s+2}$$

$$b) \quad G \left(\frac{Y}{R} \right) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 G_3 + G_1 G_2 G_4}$$

5. 2p

Bodediagram. Ange den överföringsfunktion som överensstämmer med följande Bode-diagram. Där kurvan lutar är lutningen 1 dekad/dekad.



Svar:

$$G(s) = \frac{2,5 \cdot (1+s)}{(5s+1) \cdot (0,2s+1)} = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 =$$

$$= \frac{2,5}{(5s+1)} \cdot \frac{1}{(0,2s+1)} \cdot (1+s) = \frac{2,5 \cdot (1+s)}{s^2 + 5,2s + 1}$$

6. 2p

a) Är detta en stabil överföringsfunktion? Motivera svaret!

$$\frac{s^2 + 3s + 2}{s + 4}$$

b) Rooth Hurwitz metod. Använd metoden för att avgöra om nämnarpolynomet är stabilt.

$$s^3 + 2s^2 + s + 1$$

Svar:

a) Nämnaren $s + 4$ har pol i $s = -4$ som ligger i vänstra halvplanet. Uppenbart stabil överföringsfunktion.

$$\frac{s^2 + 3s + 2}{s + 4} \quad s = -4$$

b) $s^3 + 2s^2 + s + 1$

1 1 0

2 1 0

0,5 0 0

1 0 0

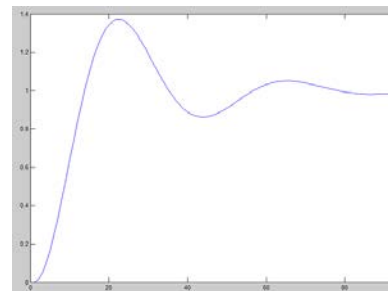
Ingen ändring av tecknet i första kolumnen.

Inga poler i höger halvplan – stabilt nämnarpolynom.

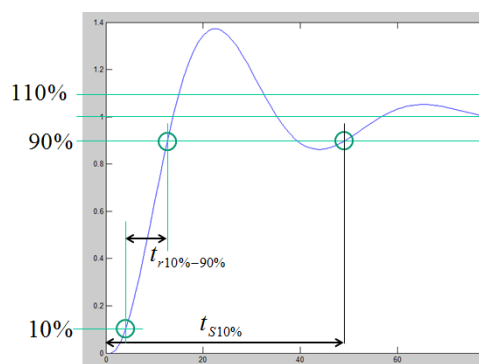
7. 2p

Risetime och settlingtime.

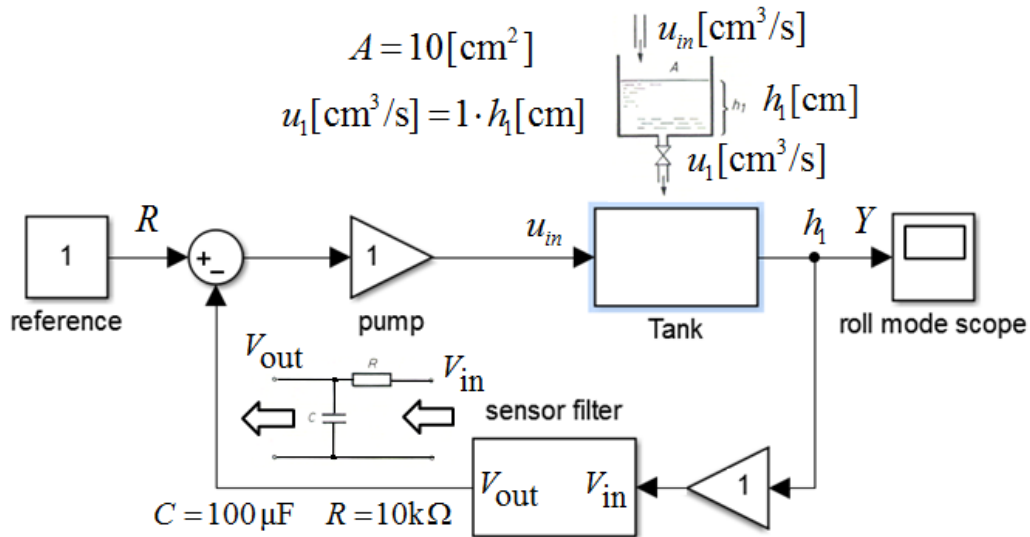
Markera i figuren (på svarsbladet, lämna in detta) hur man mäter risetime t_r och hur man mäter settlingtime t_s ($\pm 10\%$).



Svar:



8. 6p



En skola har en labutrustning med en tank som fylls med en pump. Se figuren. En trycksensor med ett lågpäss RC-filtret mäter vätskehöjden i tanken.

Tanken har tvärsnittarean $A = 10 \text{ cm}^2$. Mellan höjden i tanken och utflödet råder sambandet $u_1 = 1 \cdot h_1$. Sensor filtret består av $R = 10 \text{ k}\Omega$ och $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$ och har förstärkningen 1. Pumpen har förstärkningen 1.

Tag fram överföringsfunktionen $\frac{Y}{R}$ från referensstorhet till utstorhet.

Svar:

$$A \frac{dh_1}{dt} = u_{in} - u_1 = u_{in} - 1 \cdot h_1$$

$$\{L\} \quad H_1(As+1) = U_{in} \quad \frac{H_1}{U_{in}} = \frac{1}{As+1} = \frac{1}{10s+1}$$

Sensor LP-filtret med tidkonstant RC

$$V_{out} = V_{in} \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} \Rightarrow \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{RCs+1} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot s + 1} = \frac{1}{s+1}$$

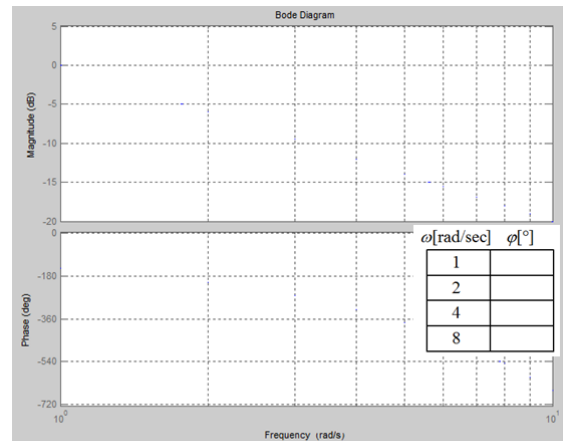
$$\frac{Y}{R} = \frac{\frac{1}{10s+1}}{1 + \frac{1}{10s+1} \cdot \frac{1}{s+1}} = \frac{s+1}{10s^2 + 11s + 2}$$

9. 8p

En process har överföringsfunktionen $G_p(s) = \frac{e^{-s}}{s}$.

Rita överföringsfunktionens Bodediagram (på svarsbladet, lämna in detta). Gradera ω -axeln. Rita beloppsfunktionen. Beräkna fasfunktionen φ för ω 1, 2, 4, 8. Skissa den i diagrammet. Beräkna

$$\Phi_m = ? \quad A_m = ? \quad \omega_\pi = ? \quad \omega_C = ? \quad t_r \approx ? \quad e_0 = ?$$



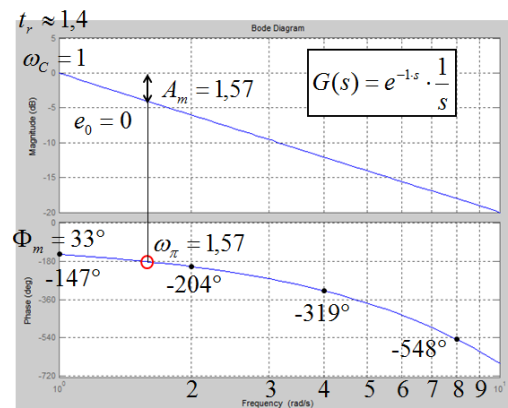
$$\omega_C = ? \quad \omega_\pi = ? \quad A_m = ? \quad \Phi_m = ? \quad e_0 = ? \quad t_r \approx ?$$

Svar:

$$G(s) = e^{-s} \cdot \frac{1}{s} \quad G(j\omega) = e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{j\omega}$$

$$|G(\omega)| = 1 \cdot \frac{1}{\omega} \quad \varphi[^\circ](\omega[\text{rad/sec}]) = -90 - 1 \cdot \omega \frac{180}{\pi}$$

Beloppsfunktionen är en rak linje med lutningen 20dB/dekad genom punkten 0[dB], 10⁰[rad/sec].



$$\omega_\pi : -180 = -90 - \omega_\pi \frac{180}{\pi} \Rightarrow \omega_\pi = \frac{90\pi}{180} = 1,57 [\text{rad/sec}]$$

$$|G(\omega_\pi)| = 1 \cdot \frac{1}{\omega_\pi} \quad A_m = \frac{1}{|G(\omega_\pi)|} = \omega_\pi = 1,57$$

$$\varphi[^\circ](\omega[\text{rad/sec}]) = -90 - 1 \cdot \omega \frac{180}{\pi}$$

$$\omega = \{1, 2, 4, 8\} \quad \varphi = \{-147^\circ, -204^\circ, -319^\circ, -548^\circ\}$$

$$|G(\omega)| = 1 \cdot \frac{1}{\omega} \Rightarrow \omega_C = 1$$

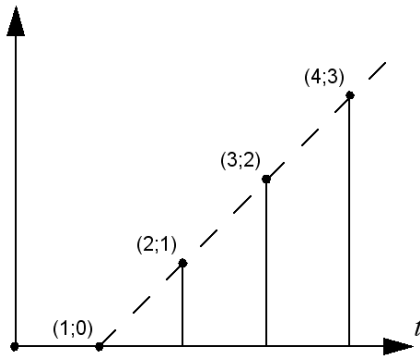
$$\Phi_m = 180^\circ + \varphi(\omega_C) = 180^\circ - 147^\circ = 33^\circ$$

$$t_r \approx \frac{1,4}{\omega_C} \quad \omega_C = 1 \Rightarrow t_r \approx 1,4$$

$e_0 = 0$ integrerande process.

10. 2p

- a) Bestäm z-transformen för denna tidsdiskreta signal.
Ange den på både negativ och positiv form.



- b) Bestäm tidsdiskreta motsvarigheten till

$$G(s) = 1 \quad G(s) = \frac{5}{s}$$

Svar:

- a) Enhetsramp fördröjd ett steg

$$\frac{z}{(z-1)^2} \cdot z^{-1} = \frac{1}{(z-1)^2} \quad \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \cdot z^{-1} = \frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}$$

- b) Diskretisering med tabell.

$$G(s) = 1 \Rightarrow H(z) = 1 \quad G(s) = \frac{5}{s} \Rightarrow H(z) = \frac{5 \cdot h}{z-1}$$

11. 2p

Avgör om nedanstående system är stabilt.

$$H(z) = \frac{555z^2}{z^3 - 5z^2 + 25z + 125}$$

Svar: Schur-Coon metoden

$$z^3 - 5z^2 + 25z + 125$$

$$a_0 = 1 \quad a_1 = -5 \quad a_2 = 25 \quad a_3 = 125$$

$$b_0 = a_0 a_0 - a_3 a_3 = 1 \cdot 1 - 125 \cdot 125 = -15626$$

$$b_1 = a_0 a_1 - a_3 a_2 = 1 \cdot (-5) - 125 \cdot 25 = -3130$$

$$b_2 = a_0 a_2 - a_3 a_1 = 1 \cdot 25 - 125 \cdot (-5) = 650$$

...

Redan vid beräkningen av b_0 så får den negativt tecken medan a_0 har positivt tecken, så systemet kommer aldrig att kunna vara stabilt, fortsatta beräkningar är onödiga.

12. 8p

En process ska regleras med icke-integrerande polplaceringsregulator. Processen beskrivs med följande differensekvation

$$y[k] = 0,5y[k-1] + 5u[k-1] + 5u[k-2]$$

a) Bestäm överföringsfunktionen (1p)

b) Dimensionera regulatorn och anta att alla poler ska ligga i $z = 0,5$. (3p)

c) Rita blockschema för hela systemet. (1p)

d) Vilka ändringar behövs för att transformera ovanstående polplacerings regulator till dead-beat regulator? Skriv ner överföringsfunktionen för denna dead-beat regulator. (2p)

e) Jämför kvalitativt dead-beat regulatorn med ursprungliga regulatorn. (1p)

Svar:

$$a) \quad y[k] = 0,5y[k-1] + 5u[k-1] + 5u[k-2]$$

$$\{Z\} \quad Y = 0,5Yz^{-1} + 5Uz^{-1} + 5Uz^{-2}$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{5z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - 0,5z^{-1}}$$

$$B(z) = 5z^{-1} + 5z^{-2} \quad A(z) = 1 - 0,5z^{-1}$$

$$b) \quad n_p = n_a + n_b - 1 = 1 + 2 - 1 = 2$$

$$n_c = n_b - 1 = 2 - 1 = 1 \quad n_d = n_a - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$P(z) = (1 - 0,5z^{-1})^2 = 0,25z^{-2} - z^{-1} + 1$$

$$C(z) = 1 + c_1z^{-1} \quad D(z) = d_0$$

$$P(z) = A(z)C(z) + B(z)D(z)$$

$$0,25z^{-2} - z^{-1} + 1 = (1 - 0,5z^{-1})(1 + c_1z^{-1}) + (5z^{-1} + 5z^{-2})(d_0)$$

$$0,25z^{-2} - z^{-1} + 1 = (5d_0 - c_1)z^{-2} + (c_1 + 5d_0 - 0,5)z^{-1} + 1$$

$$\begin{cases} -1 = c_1 + 5d_0 - 0,5 \\ 0,25 = 5d_0 - 0,5c_1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -0,5 \\ d_0 = 0 \end{cases}$$

$$C(z) = 1 - 0,5z^{-1} \quad D(z) = 0$$

$$\frac{P(z)}{B(z)} = \frac{1 - z^{-1} + 0,25z^{-2}}{5z^{-1} + 5z^{-2}} \quad K_r = \frac{P(z=1)}{B(z=1)} = \frac{1 - 1 + 0,25}{5 + 5} = 0,025$$

d) dead beat regulatorn har polerna i origo.

$$P(z) = (1 - 0z^{-1})^2 = 1$$

$$1 + 0z^{-1} + 0z^{-2} = 1 + (c_1 + 5d_0 - 0,5)z^{-1} + (5d_0 - c_1)z^{-2}$$

$$0 = c_1 + 5d_0 - 0,5$$

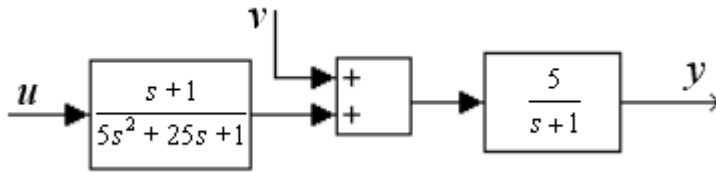
$$0 = 5d_0 - 0,5c_1 \quad c_1 = \frac{1}{3} \quad d_0 = \frac{1}{30}$$

$$\frac{P(z)}{B(z)} = \frac{1}{5z^{-1} + 5z^{-2}} \quad K_r = \frac{P(z=1)}{B(z=1)} = \frac{1}{5 + 5} = 0,1$$

e) Dead-beatregulatorn beskrivs i bokens avsnitt 18.3.

13. 6p

En process beskrivs med nedanstående blockschema. Processen kan beskrivas på tillståndsform med två tillstånd x_1 och x_2 . Signalen u är styrsignal, v är reglerad storhet och y är mätsignal.



a) ställ upp systemet på tillståndsform. Välj styrbar kanonisk form. (3p)

b) beräkna stationärvärde av tillståndssystemet från a). Använd enhetssteg för u och v . (2p)

Svar:

$$a) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -0,2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$\dot{x}_3 = 5(0,2 \quad 0,2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - x_3 + 5u = (1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - x_3 + 5u$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0,2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad y = (0 \quad 0 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0,2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Vi antar att insignalen och reglerad storhet är enhetssteg. $u=1$ och $v=1$.

$$\begin{cases} 0 = -5x_1 - 0,2x_3 + u \\ 0 = x_2 \\ 0 = x_1 + x_2 - x_3 + 5u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = -5x_1 - 0,2x_3 + 1 \\ 0 = x_1 - x_3 + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = -5(x_3 - 5) - 0,2x_3 + 1 \\ x_1 = x_3 - 5 \end{cases}$$

$$0 = -5x_3 + 25 - 0,2x_3 + 1 \Rightarrow 5,2x_3 = 26 \Rightarrow x_3 \approx 5$$

$$\Rightarrow x_1 = 5 - 5 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow y = (0 \quad 0 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \quad \text{Stationärvärdet är 5.}$$

14. 2p

En spole används för att beröringsfritt mäta positionen hos en järnkärna. Kärnan förs först in i spolen från ena hållet och fortsätter sedan ut genom andra änden.

Skissa hur spolens resistans R , reaktans X och impedans Z varierar med järnkärnans position.

Rita de tre kurvorna (på svarsbladet, lämna in detta).

