KTH Informations- och kommunikationsteknik

Tentamen i
IE1304 Reglerteknik
Måndag 16/3 2015 9.00-13.00

Allmän information

Examinator: William Sandqvist.

Ansvarig lärare: William Sandqvist, tel 08-790 4487 (Campus Kista),
Tentamensuppgifterna behöver inte återlämnas när du lämnar in din skrivning.

Hjälpmedel: Räknare/Grafräknare. Kursens formelblad har bifogats tentamen.

Tentamens omfattning

Information om rättning och betyg

Motivera alla svar.

Tabeller och beräkningar som använts ska finnas med i lösningarna i läsbar form. Om svaret på en fråga är "42" så måste du också tala om varför.

Ofullständigt motiverade svar ger *inte* full poäng!

Tentamen kan ge maximalt 50 p (denna gång 56p), godkändgränsen går vid 25 p.
Vid detta **ordinarie tentamenstillfälle** kan upp till 6 extra poäng läggas till från denna **kursomgångs** tre seminarier (2+2+2). Totalt 56p.

0 –	25 –	30 –	35 –	40 –	45–
F	E	D	C	B	A

Resultatet meddelas senast måndag den 6 april.

---

1. 2p

a) Vilken överföringsfunktion $\frac{Y}{X}$ har denna differentialekvation?

$$y''-3y'+2y=3x'+x$$

b) Vilken överföringsfunktion $\frac{Y}{X}$ har denna PID-regulator?

$$y=x+5\int xdt+2\dot{x}$$

2. 2p

Vilket stegsvar har följande överföringsfunktion? Använd Laplacetransform tabellen.
$x(\ t>0\ )=1.$ $y(t)=?$

$$G(s)=\frac{Y}{X}=\frac{1}{s^2+4}$$

3. 2p

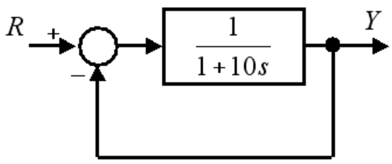
Partialbråksutveckla följande polynom

$$G(s)=\frac{9-3s}{(s+1)(s+7)}$$

4. 4p

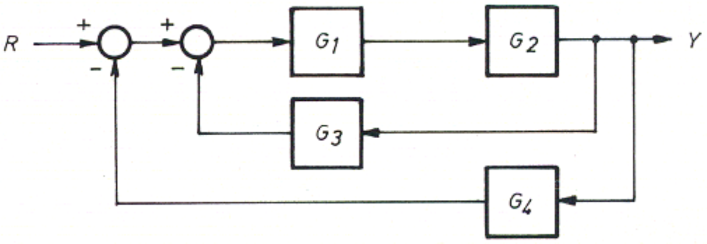
a) Feedback. En process har överföringsfunktionen $\frac{1}{1+10s}$.

Den återkopplas enligt figuren. Vad blir överföringsfunktionen för $\frac{Y}{R}$?



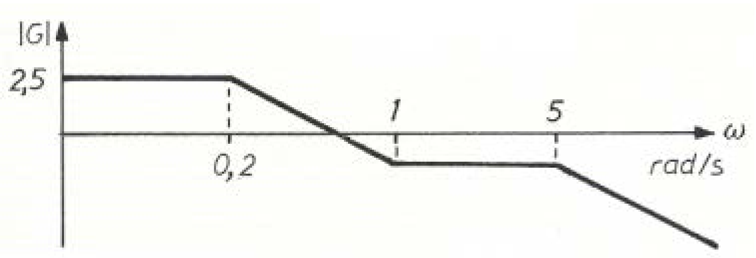
b) Blockschemareduktion.

Reducera blockschemat till överföringsfunktionen för $\frac{Y}{R}$ så långt det går.



5. 2p

Bodediagram. Ange den överföringsfunktion som överensstämmer med följande Bode-diagram. Där kurvan lutar är lutningen 1 dekad/dekad.



6. 2p

a) Är detta en stabil överföringsfunktion? Motivera svaret!

$$\frac{s^2+3s+2}{s+4}$$

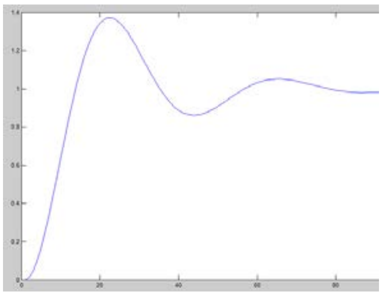
b) Rooth Hurwitz metod. Använd metoden för att avgöra om nämnarpolynomet är stabilt.

$$s^3+2s^2+s+1$$

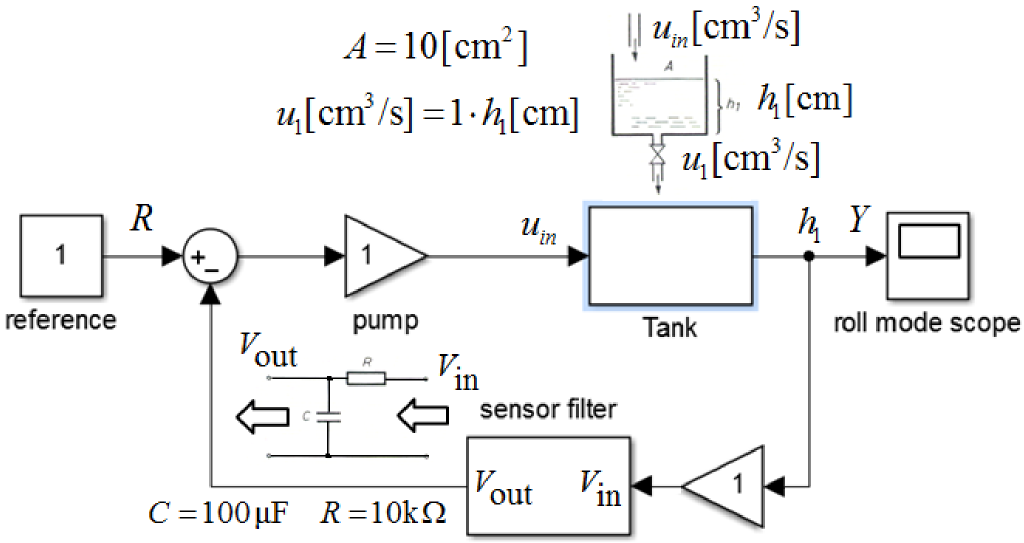
7. 2p

Risetime och settlingtime.

Markera i figuren (på svarsbladet, lämna in detta) hur man mäter risetime t_r och hur man mäter settlingtime t_s (±10%).



8. 6p



En skola har en labutrustning med en tank som fylls med en pump. Se figuren. En trycksensor med ett RC-filter mäter vätskehöjden i tanken.

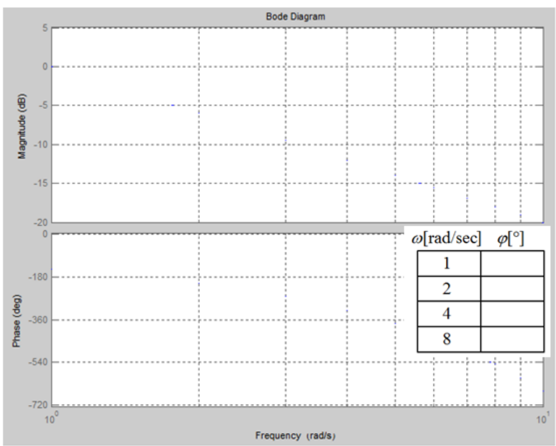
Tanken har tvärsnittsarean A = 10 cm^2. Mellan höjden i tanken och utflödet råder sambandet $u_1 = 1 \cdot h_1$. Sensor filtret består av R = 10 kΩ och C = 100 µF och har statiska förstärkningen 1. Pumpen har förstärkningen 1.

Tag fram överföringsfunktionen $\dfrac{Y}{R}$ från referensstorhet till utstorhet.

9. 8p

En process har överföringsfunktionen $G_P(s) = \dfrac{e^{-s}}{s}$.

Rita överföringsfunktionens Bodediagram (på svarsbladet, lämna in detta). Gradera ω-axeln. Rita beloppsfunktionen. Beräkna fasfunktionen φ för ω 1, 2, 4, 8. Skissa den i diagrammet. Beräkna $\Phi_m = ?$ $A_m = ?$ $\omega_\pi = ?$ $\omega_C = ?$ $t_r \approx ?$ $e_0 = ?$

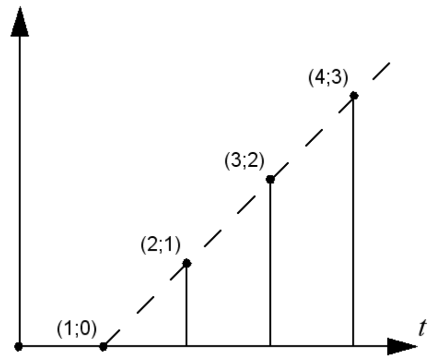


ω[rad/sec]	φ[°]
1	
2	
4	
8	

$\omega_C = ?$ $\omega_\pi = ?$ $A_m = ?$ $\Phi_m = ?$ $e_0 = ?$ $t_r \approx ?$

10. 2p

a) Bestäm z-transformen för denna tidsdiskreta signal.
Ange den på både negativ och positiv form.



b) Bestäm tidsdiskreta motsvarigheten till

$G(s) = 1 \quad G(s) = \frac{5}{s}$

11. 2p

Avgör om nedanstående system är stabilt.

$$H(z) = \frac{555z^2}{z^3 - 5z^2 + 25z + 125}$$

12. 8p

En process ska regleras med icke-integrerande polplacerings regulator. Processen beskrivs med följande differensekvation

$$y[k] = 0{,}5y[k-1] + 5u[k-1] + 5u[k-2]$$

a) Bestäm överföringsfunktionen (1p)

b) Dimensionera regulatorn och anta att alla poler ska ligga i z = 0,5. (3p)

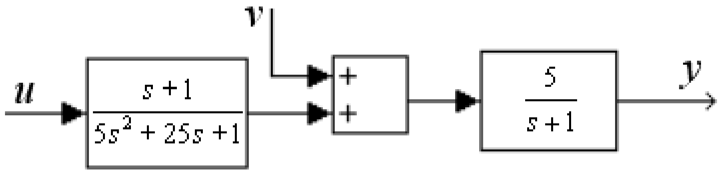
c) Rita blockschema för hela systemet. (1p)

d) Vilka ändringar behövs för att transformera ovanstående polplacerings regulator till dead-beat regulator? Skriv ner överföringsfunktionen för denna dead-beat regulator. (2p)

e) Jämför kvalitativt dead-beat regulatorn med ursprungliga regulatorn. (1p)

13. 6p

En process beskrivs med nedanstående blockschema. Processen kan beskrivas på tillståndsform med två tillstånd `x1` och `x2`. Signalen *u* är styrsignal, *v* är reglerad storhet och *y* är mätsignal.

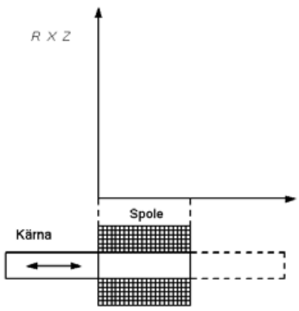


a) ställ upp systemet på tillståndsform. Välj styrbar kanonisk form. (4p)

b) beräkna stationärvärde av tillståndssystemet från a). Använd enhetssteg för *u* och *v*. (2p)

14. 2p

En spole används för att beröringsfritt mäta positionen hos en järnkärna.
Kärnan förs först in i spolen från ena hållet och fortsätter sedan ut genom andra änden.
Skissa hur spolens resistans *R*, reaktans *X* och impedans *Z* varierar med järnkärnans position.
Rita de tre kurvorna (på svarsbladet, lämna in detta).



Lycka till!

Formelblad vid tentamen i Reglerteknik IE1304

Regulatortyper

Regulator	Funktion	Överföringsfunktion $G(s)$
P-regulator	$u(t) = u_0 + K \cdot e(t)$	$G(s) = K$
I-regulator	$u(t) = \frac{1}{T_I}\int_0^t e(t)dt$	$G(s) = \frac{1}{T_I s}$
D-länk	$u(t) = T_D \frac{de(t)}{dt}$	$G(s) = T_D \cdot s$
PID-regulator	$u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e(t)dt + T_D \frac{de(t)}{dt}\right)$	$G(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$
$u(k) = K\left(e(k) + \frac{h}{T_I}\sum_{i=0}^{k} e(i) + T_D \frac{e(k) - e(k-1)}{h}\right)$	Diskret PID, förutsätter hög samplingsfrekvens	
h = samplingsperiod K = förstärkning T_I = integreringstid T_D = deriveringstid		

Laplacetransformtabell

Laplacetransform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$ $t > 0$	Laplacetransform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$ $t > 0$
1	$\delta(t)$ impulsfunktionen	$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$ stegfunktionen
$\frac{1}{s^2}$	$1 \cdot t$ rampfunktionen	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$
$\frac{1}{s(1+as)}$	$1 - e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{s(1+as)(1+bs)}$	$1 - \frac{a \cdot e^{-at}}{a-b} - \frac{b \cdot e^{-bt}}{b-a}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \cdot \sin at$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2}[1 - \cos at]$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \cdot \cos bt$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \cdot \sin bt$

Dämpsatsen: $e^{-\alpha t} \cdot f(t) \quad \Leftrightarrow \quad F(s+\alpha)$

Fördröjningssatsen: $f(t-T) \cdot \sigma(t-T) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-sT} \cdot F(s)$

Begynnelsevärdessatsen: $\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s)$

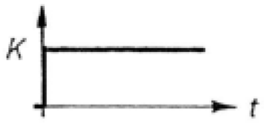
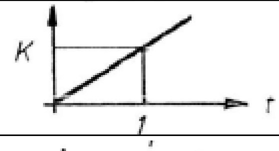
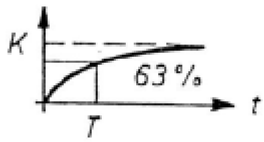
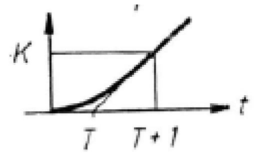
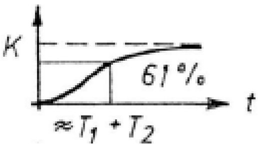
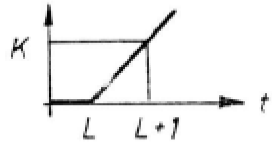
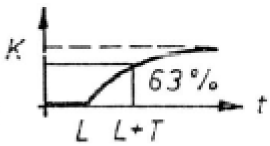
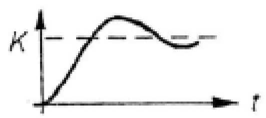
Slutvärdessatsen: $\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0^+} s \cdot F(s)$

Deriveringssatsen: $L\left[f'(t)\right] = s \cdot F(s) - f(0)$

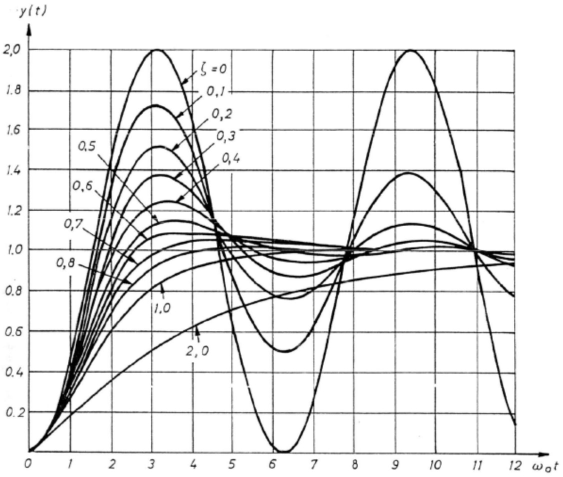
Integrationssatsen: $L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s} \cdot F(s)$

Superpositionsregeln: $L\left[a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)\right] = a \cdot F_1(s) + b \cdot F_2(s)$

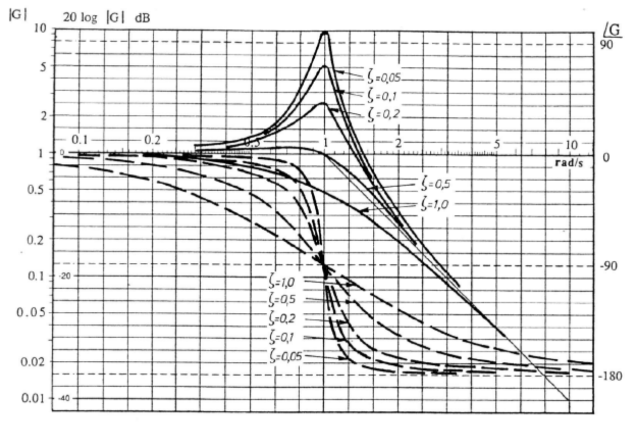
Samband mellan stegsvar och överföringsfunktion

P-verkan $G(s) = K$		Integration $G(s) = \frac{K}{s}$	
En tidkonstant $G(s) = \frac{K}{1+Ts}$		Integration+tidkonstant $G(s) = \frac{K}{s(1+Ts)}$	
Två tidkonstanter $G(s) = \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$		Integration+dödtid $G(s) = \frac{K \cdot e^{-Ls}}{s}$	
En tidkonstant+dödtid $G(s) = \frac{K \cdot e^{-Ls}}{1+Ts}$		Andra ordningens process med översväng $G(s) = \frac{K}{as^2 + bs + 1}$	

Andra ordningens system med komplexa rötter



Linjärt



Bode-diagram

ω_0 odämpade systemets egensvängning

ζ relativ dämpning

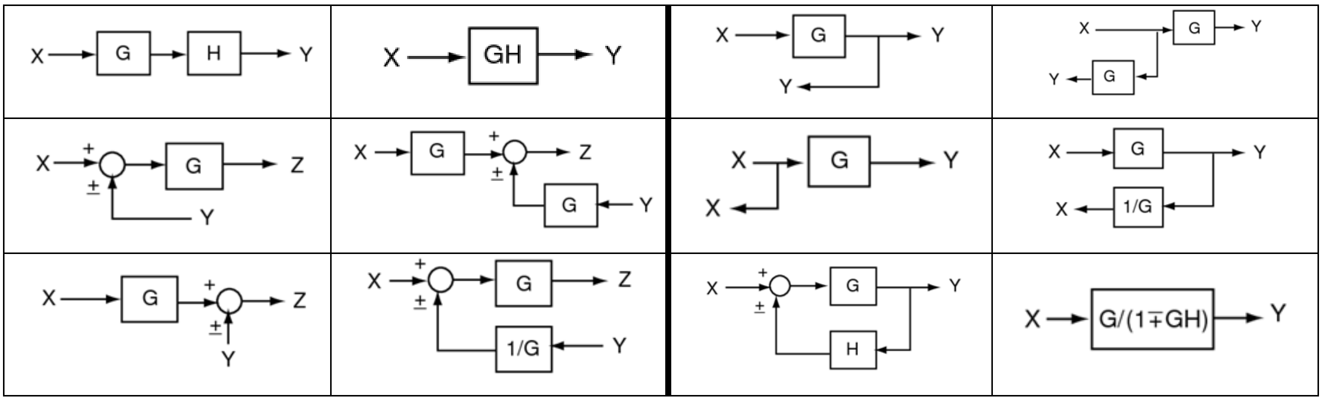
M_P maximal översväng

t_P tiden för maximal översväng

$$G(s) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$M_P = e^{-\frac{\zeta \cdot \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad t_P = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Blockschema reduktions regler



Fysikaliska modeller

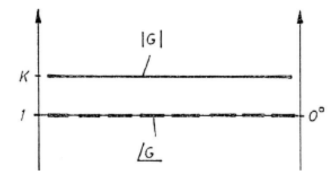
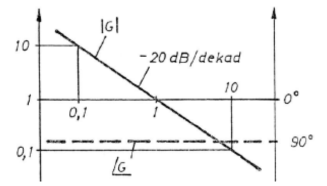
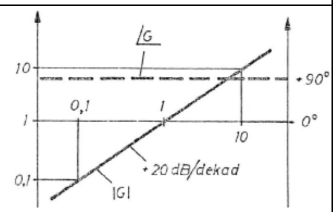
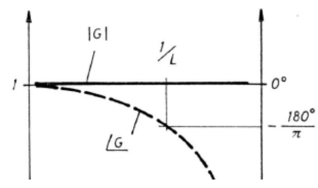
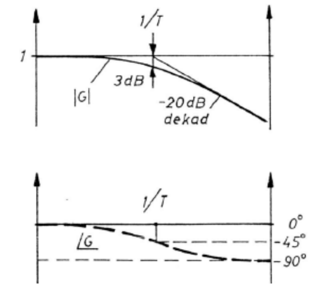
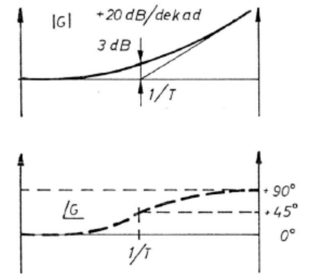
Mekaniska system	Elektriska system
Massa $\sum F = M \dfrac{d^2x}{dt}$ (Newtons andra lag) Fjäder $F = k \cdot x$ (k = fjäderkonstant) Dämpare $F = b\dfrac{dx}{dt}$ (b = dämpkonstant)	Resistor $\dfrac{U}{I} = R$ (R = resistans) Kondensator $\dfrac{U}{I} = \dfrac{1}{C \cdot s}$ (C = kapacitans) Spole $\dfrac{U}{I} = L \cdot s$ (L = induktans)
Termisk process	**Nivåreglering**
Energibalans $\dfrac{dE}{dt} = P_{in} - P_{ut}$ Värmeenergi $E = T \cdot V \cdot c \cdot \rho$ T temperatur [K] V volym [m^3] c värmekapacitet [J/K·kg] ρ densitet [kg/m^3]	Materialbalans $\dfrac{dV}{dt} = u_{in} - u_{ut}$ V volym [m^3] u_{in} inflöde [m^3/s] u_{ut} utflöde [m^3/s]

Frekvensanalys

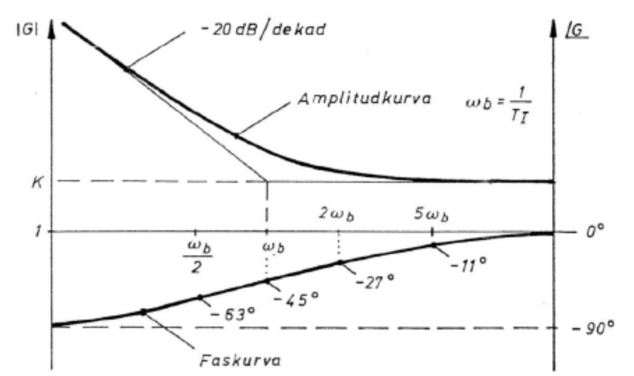
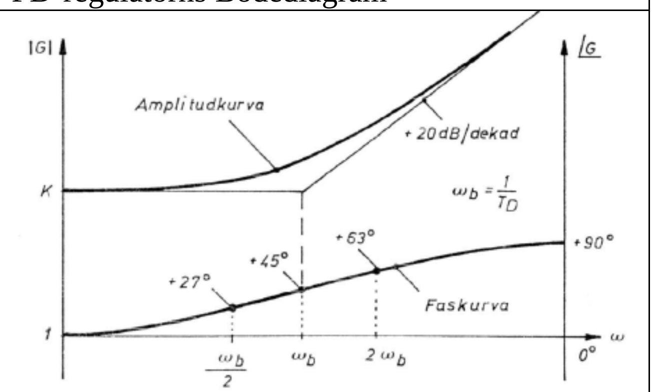
$G(s)$

$A(\omega) = \left|\underline{G}(j\omega)\right| \quad \varphi(\omega) = \arg\left(\underline{G}(j\omega)\right) \quad \angle\underline{G}(j\omega) \qquad PHASOR \;\; A\angle\varphi$

Bodediagram för grundfaktorer

Förstärkning $G(s) = K$ $\lvert \underline{G}(j\omega)\rvert = K$ $\arg\big(\underline{G}(j\omega)\big) = 0°$		Integrering $G(s) = \dfrac{1}{s}$ $\lvert \underline{G}(j\omega)\rvert = \dfrac{1}{\omega}$ $\arg\big(\underline{G}(j\omega)\big) = -90°$	
Derivering $G(s) = s$ $\lvert \underline{G}(j\omega)\rvert = \omega$ $\arg\big(\underline{G}(j\omega)\big) = +90°$		Dödtid $G(s) = e^{-L\cdot s}$ $\lvert \underline{G}(j\omega)\rvert = 1$ $\arg\big(\underline{G}(j\omega)\big) = -\omega \cdot L \dfrac{180°}{\pi}$	
Tidkonstant nämnare $G(s) = \dfrac{1}{1+Ts}$ $\lvert \underline{G}(j\omega)\rvert = \dfrac{1}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}$ $\arg\big(\underline{G}(j\omega)\big) = -\arctan T\omega$		Tidkonstant täljare $G(s) = \dfrac{1+Ts}{1}$ $\lvert \underline{G}(j\omega)\rvert = \dfrac{\sqrt{1+(T\omega)^2}}{1}$ $\arg\big(\underline{G}(j\omega)\big) = \arctan T\omega$	
$G(s) = \dfrac{1}{1+2\zeta Ts + T^2 s}$ $\quad \lvert \underline{G}(j\omega)\rvert = \dfrac{1}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2}}$ $\quad \arg(\underline{G}(j\omega)) = -\arctan\left(\dfrac{2\zeta T\omega}{1-T^2\omega^2}\right)$			

PI och PD-regulatorernas Bodediagram

PI-regulatorns Bodediagram	PD-regulatorns Bodediagram
	

PI-regulator. Dimensionera med fasmarginal ϕ_m + 11°. Regulatorns Bodediagram placeras med sitt $5\omega_b$ vid ϕ_m+11°. Totalt uppnås då den önskade fasmarginalen ϕ_m.

Stabilitet

Nyquist förenklade stabilitets kriterium för öppna systemet. Stabilt om:

$$\lvert \underline{G}(j\omega)\rvert < 1 \quad \text{vid} \quad \arg\big(\underline{G}(j\omega)\big) = -180°$$

Agebraiskt. Stabilt om: *Slutna systemets* poler ligger i vänstra halvplanet.

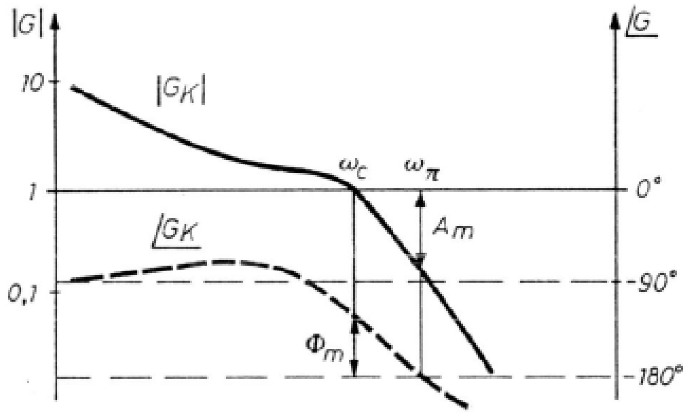
Stabilitetsmarginaler

ω_π självsvängningsfrekvens där $\arg\left(\underline{G}(j\omega)\right) = -180°$

ω_c crossover frekvens där $\left|\underline{G}(j\omega)\right| = 1$

A_m amplitud marginal $A_m = \dfrac{1}{|G(\omega_\pi)|}$

ϕ_m fasmarginal $\phi_m = 180° + \arg\left(\underline{G}(j\omega_c)\right)$



Routh Hurwitz metod

Karakteristisk ekvation:

$B_0 s^n + B_1 s^{n-1} + B_2 s^{n-2} + \ldots + B_n = 0 \quad B_0 > 0$

Talschema:

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
s^n & B_0 & B_2 & B_4 & B_6 & \ldots \\
s^{n-1} & B_1 & B_3 & B_5 & B_7 & \ldots \\
\hline
s^{n-2} & C_0 & C_1 & C_2 & \ldots & \\
s^{n-3} & D_0 & D_1 & D_2 & \ldots & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
s^0 & & & & &
\end{array}
$$

där $C_0 = \dfrac{B_1 B_2 - B_0 B_3}{B_1}$

$C_1 = \dfrac{B_1 B_4 - B_0 B_5}{B_1}$

$C_2 = \dfrac{B_1 B_6 - B_0 B_7}{B_1}$

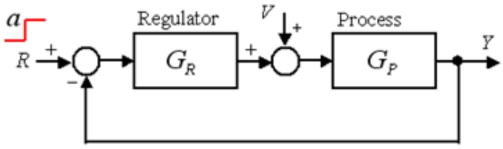
$D_0 = \dfrac{C_0 B_3 - B_1 C_1}{C_0}$

etc

Om alla tal i första kolumnen är positiva har karakteristiska ekvationen alla rötter i vänster halvplan.

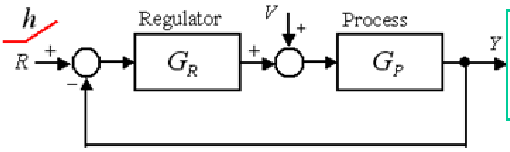
Kvarstående reglerfel, statisk noggrannhet

e_0 stegformad börvärdesändring
a steghöjd



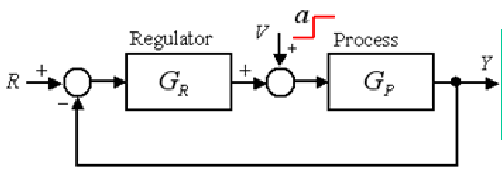
$$e_0 = \lim_{s \to 0} \frac{a}{1 + G_R \cdot G_P}$$

e_1 rampformad börvärdesändring
h rampens lutning



$$e_1 = \lim_{s \to 0} \frac{h}{s \cdot (1 + G_R \cdot G_P)}$$

e_v stegstörning
a steghöjd



$$e_v = \lim_{s \to 0} \frac{-G_P \cdot a}{1 + G_R \cdot G_P}$$

Snabbhet stigtiden $t_r \approx \frac{1{,}4}{\omega_c}$

Ziegler-Nichols metod för PID-inställning

K_0 är den förstärkning då självsvängning uppkommer vid P reglering.

$$K_0 = \frac{1}{|G(\omega_\pi)|} \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_\pi}$$

	K	T_I	T_D
$P:$	$0{,}5 \cdot K_0$	$-$	$-$
$PI:$	$0{,}45 \cdot K_0$	$0{,}85 \cdot T_0$	$-$
$PID:$	$0{,}6 \cdot K_0$	$0{,}5 \cdot T_0$	$0{,}125 \cdot T_0$

Lambdametoden för PI-inställning

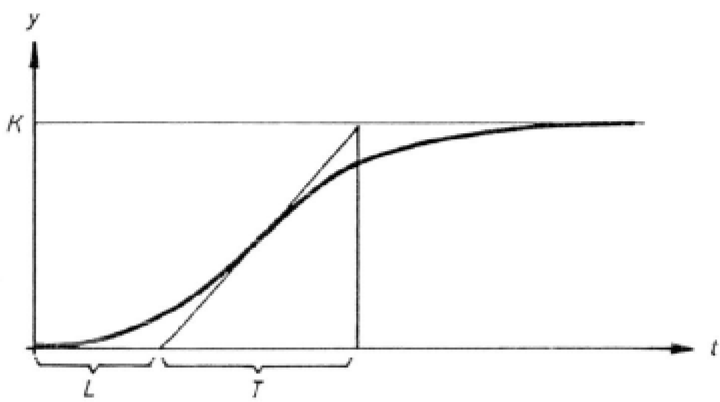
Vid lambdametoden mäts stegsvaret från det öppna systemet och jämförs med stegsvaret från en process med en tidkonstant T och dödtid L.

$$G(s) = \frac{K \cdot e^{-Ls}}{1 + Ts}$$

L uppskattas med hjälp av tangentens skärning med tidaxeln.

T uppskattas ur triangeln i figuren, eller som tiden efter dödtiden L, fram till 63% av slutvärdet.

$$K = \frac{T}{K_S(\lambda + L)} \qquad T_I = T$$



$$M = \max\{L, T\} \qquad \lambda = p \cdot M$$

$$1 < p < 3 \quad (speed \leftarrow p \rightarrow stability)$$

z-transformtabell

Tidsdiskret funktion $f(k)$	z-transform $F(z)$ pos repr.	z-transform $F(z)$ neg repr.
$P_e(k)$ enhetspuls	1	
$S_e(k)$ enhetssteg	$\dfrac{z}{z-1}$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$
$f(k)=1\cdot k$ enhetsramp	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$f(k)=(1\cdot k)^2$ enhetsparabel	$\dfrac{z^2+z}{(z-1)^3}$	$\dfrac{z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$
$f(k)=a^k$ exponentialfunktion	$\dfrac{z}{z-a}$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$
$P_e(k-L)$ fördröjd puls	$\dfrac{1}{z^L}$	z^{-L}
$S_e(k-L)$ fördröjt steg	$\dfrac{z^{1-L}}{z-1}$	$\dfrac{z^{-L}}{1-z^{-1}}$
$f(k)=e^{-ak}$	$\dfrac{z}{z-e^{-a}}$	$\dfrac{1}{1-e^{-a}z^{-1}}$
$f(k)=\sin\omega k$	$\dfrac{z\cdot\sin\omega}{z^2-(2\cos\omega)z+1}$	$\dfrac{z^{-1}\cdot\sin\omega}{1-(2\cos\omega)z^{-1}+z^{-2}}$
$f(k)=\cos\omega k$	$\dfrac{z(z-\cos\omega)}{z^2-(2\cos\omega)z+1}$	$\dfrac{z^{-1}(1-z^{-1}\cos\omega)}{1-(2\cos\omega)z^{-1}+z^{-2}}$
$f(k)=1-e^{-ak}$	$\dfrac{z(1-e^{-a})}{(z-1)(z-e^{-a})}$	$\dfrac{(1-e^{-a})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-a}z^{-1})}$

Superpositionsregeln: $Z\big[a\cdot f_1(k)+b\cdot f_2(k)\big]=a\cdot F_1(z)+b\cdot F_2(z)$

Förskjutningssatsen: $Z\big[f(k-L)\big]=F(z)\cdot z^{-L}$

Begynnelse och slutvärdessatserna: $f(0)=\lim_{s\to\infty}F(z)$ $\quad \lim_{k\to\infty} f(k)=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot F(z)$

Diskretisering

Diskretisering med formel

$$H(z)=(1-z^{-1})\cdot Z\left[L^{-1}\left(G(s)\cdot\frac{1}{s}\right)_{t=kh}\right]$$

h är samplingsperioden. Steginvariant transform.

Diskretisering med tabell

Kontinuerlig process $G(s)$	Diskretiserad process $H(z)$
$\frac{K}{1+Ts}$	$\frac{K(1-e^{-h/T})}{z-e^{-h/T}} = \frac{K(1-e^{-h/T})z^{-1}}{1-e^{-h/T}z^{-1}}$
$\frac{K}{s}$	$\frac{K\cdot h}{z-1} = \frac{K\cdot h\cdot z^{-1}}{1-z^{-1}}$
e^{-hs}	z^{-1}
$\frac{K}{s(1+Ts)}$	$KT\cdot\frac{(e^{-h/T}-1+\frac{h}{T})z^{-1}+(1-e^{-h/T}(1+\frac{h}{T}))z^{-2}}{1-(1+e^{-h/T})z^{-1}+e^{-h/T}z^{-2}}$
$\frac{K}{s^2+a^2}$	$\frac{K(1-\cos ah)}{a^2}\cdot\frac{(z^{-1}+z^{-2})}{(1-2\cos ah\ z^{-1}+z^{-2})}$
$\frac{K}{s^2}$	$\frac{Kh^2}{2}\cdot\frac{(z^{-1}+z^{-2})}{(1-2\ z^{-1}+z^{-2})}$

Lineär algebra några formler

Multiplikation av 2 × 2-matriser:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Enhetsmatrisen:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invertering av en 2 × 2-matris:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Determinanten för en 2 × 2-matris:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Minsta kvadratmetoden

Överbestämt ekvationssystem $y = A\cdot r$

Felutjämnat $A^T y = (A^T A)r \quad \Rightarrow \quad r = (A^T A)^{-1} A^T y$ Matlab **r = A\y**

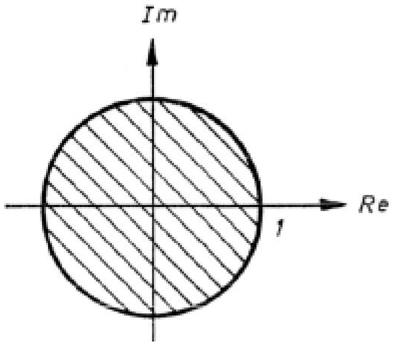
y utsignalvektor
A mätdata matrisen
r parametervektor

Diskret frekvensanalys

$$H(z) \qquad A(\omega) = \left|\underline{H}(e^{j\omega h})\right| \qquad \varphi(\omega) = \arg\left(\underline{H}(e^{j\omega h})\right) \qquad K_{LF} = H(1) \qquad f_S = \frac{1}{h} \qquad f_S \geq 2\cdot f$$

Samplingsfrekvensen måste vara minst dubbelt så hög som högsta insignalfrekvensen för att undvika vikningsdistorsion.

Diskret stabilitet

 För stabilitet ska överföringsfunktionen $H(z)$ ha alla poler inom enhetscirkeln.	Schur-Coons stabilitetskriterium (motsvarar Rooth Hurwitz). Karakteristisk ekvation: $A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n \quad a_0 > 0$ Talschema: $b_i = a_0 a_i - a_n a_{n-i} \qquad 0 \le i \le n-1$ $c_i = b_0 b_i - b_{n-1} b_{n-1-i} \qquad 0 \le i \le n-2$ $d_i = c_0 c_i - c_{n-2} c_{n-2-i} \qquad 0 \le i \le n-3$ $\ldots$ Stabilt om a_0, b_0, c_0, … alla är positiva

Kvarstående reglerfel, statisk noggrannhet

e_0 stegformad börvärdesändring $\quad e_0 = \lim_{z \to 1} \frac{a}{1 + H_R H_P}$

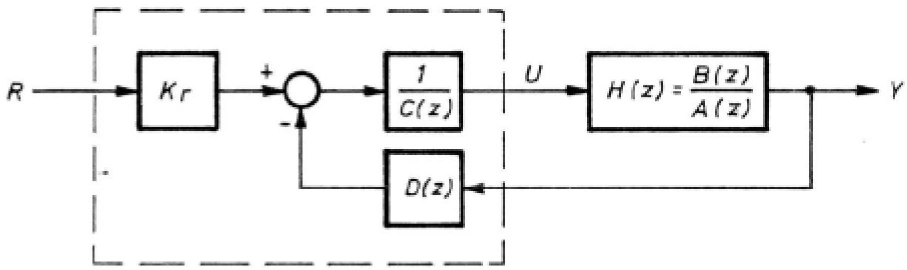
a steghöjd

e_1 rampformad börvärdesändring $\quad e_1 = \lim_{z \to 1} \frac{h}{(z-1)(1 + H_R H_P)}$

h rampens lutning

e_v stegstörning a steghöjden $\quad e_v = \lim_{z \to 1} \frac{-H_P a}{1 + H_R H_P}$

Polplaceringsregulator



$$P(z) = (1 - p_1 z^{-1})(1 - p_1 z^{-1}) \ldots (1 - p_n z^{-1})$$

$A(z)C(z) + B(z)D(z) = P(z)$ vid integrering $(1 - z^{-1})$ i C, under beräkningen enklast i A.

$$n_p \le n_a + n_b - 1 \quad n_c = n_b - 1 \quad n_d = n_a - 1$$

$$C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \ldots + c_{n_c} z^{-n_c}$$

$$D(z) = d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \ldots + d_{n_d} z^{-n_d} \qquad K_r = \frac{P(1)}{B(1)}$$

Tillståndsmodeller för kontinuerliga system

Systembeskrivning: **x**'=**Ax**+**B**u y=**Cx**
A systemmatris **B** insignalmatris **C** utsignalmatris **D** direktmatris

Generell form för enkelvariabla system

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \cdot u \qquad y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \end{bmatrix} \cdot u$$

Generell form för flervariabla system. n tillståndsvariabler, p insignaler, q utsignaler.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Diagonalform

$$G(s): \quad \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} \quad \equiv \quad \frac{\beta_1}{s-\lambda_1} + \frac{\beta_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \frac{\beta_n}{s-\lambda_n}$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \cdot u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Styrbar kanonisk form

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \qquad y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Transformera tillståndsmodell till överföringsfunktion

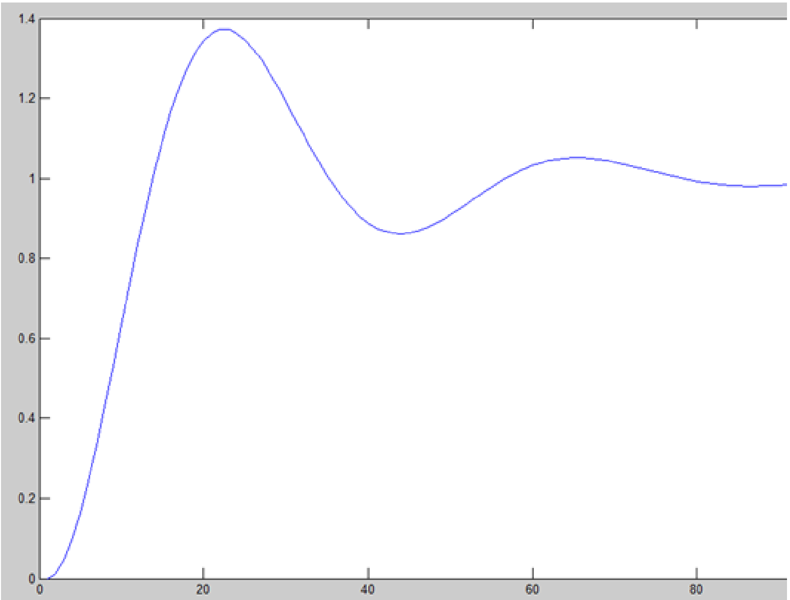
x'=**Ax**+**B***u* *y*=**Cx** {L:} *s***X**=**AX**+**B***U* *Y*=**CX**

$G(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$

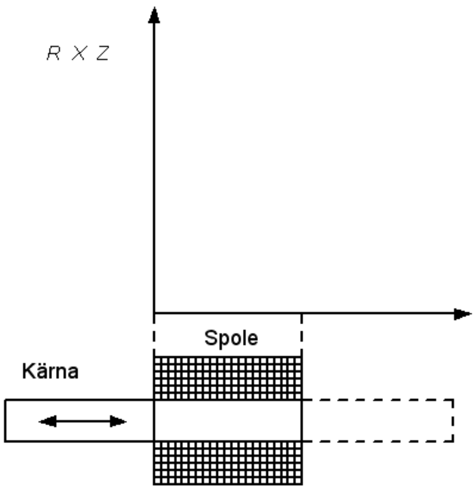
Figurblad till uppgifterna 7, 9, 14

Efternamn: ______________________________ **Förnamn:** __________________________________

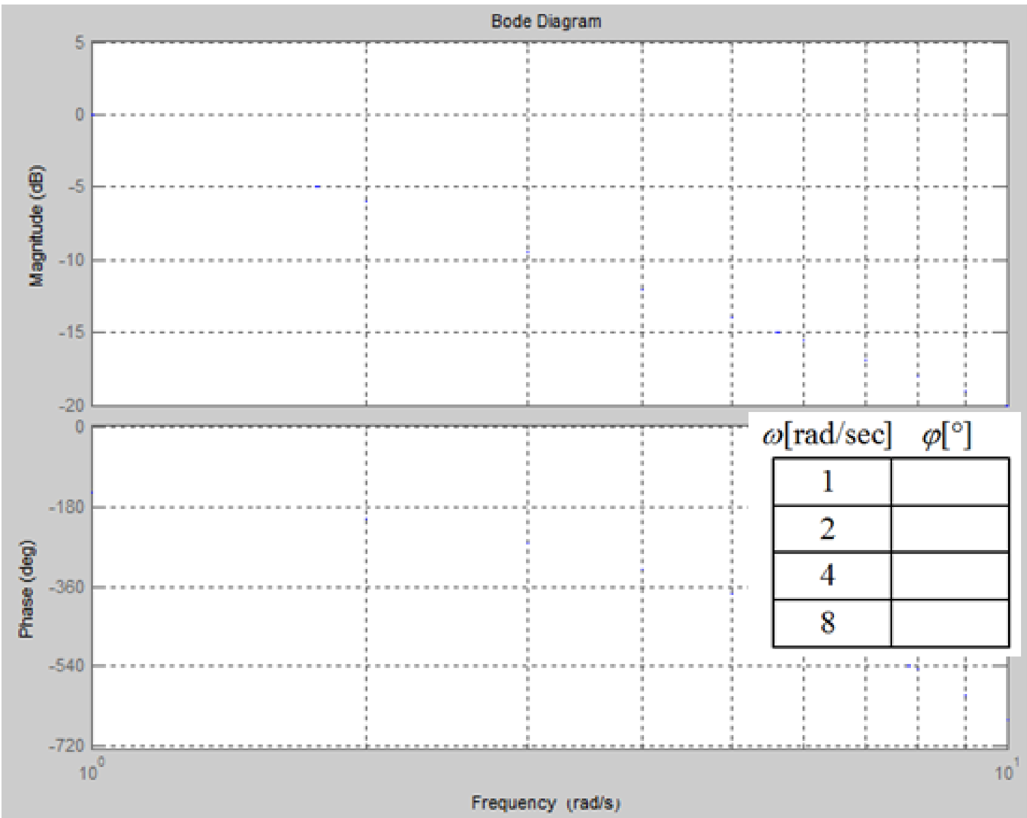
Personnummer: ______________________________



Uppg. 7. t_r t_s (±10%)



Uppg. 14. *R X Z*



ω[rad/sec]	φ[°]
1	
2	
4	
8	

$$\omega_C = ? \quad \omega_\pi = ? \qquad A_m = ? \quad \Phi_m = ? \quad e_0 = ? \quad t_r \approx ?$$

Uppg 9.