KTH Teknikvetenskap

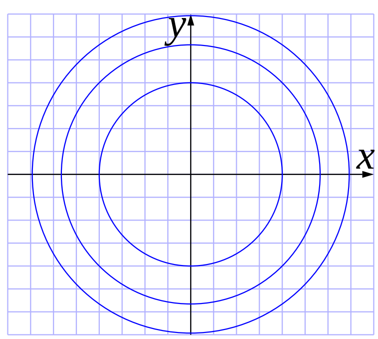
SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2015-03-16

DEL A

1. Låt $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$.
   (a) Skissa nivåkurvorna $f(x,y) = c$ till f för $c = 0$, $c = -1$ och $c = -2$. **(1 p)**
   (b) Beräkna $\mathbf{grad} f(x,y)$ i de fyra punkterna $(\pm 1, \pm 1)$, på nivåkurvan $f(x,y) = -1$ och rita in dessa vektorer i figuren. **(2 p)**
   (c) Vi vill också studera funktionen $g(x,y) = \sqrt{f(x,y)}$. I vilka punkter (x,y) i $\mathbb{R}^2$ är funktionen g väldefinierad? Skissera denna punktmängd. **(1 p)**

Lösningsförslag.

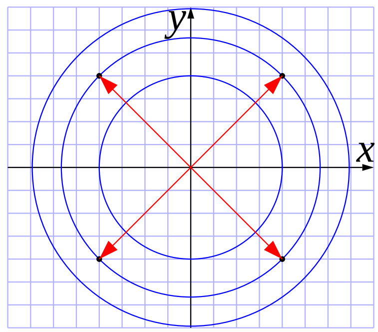
(a) Nivåkurvan $f(x,y) = 0$ ges av $1 - x^2 - y^2 = 0$, dvs enhetscirkeln. Nivåkurvan $f(x,y) = -1$ ges av $1 - x^2 - y^2 = -1$, dvs $x^2 + y^2 = 2$, vilket är en cirkel med radie $\sqrt{2}$ med centrum i origo. Nivåkurvan $f(x,y) = -2$ ges av $1 - x^2 - y^2 = -2$, dvs $x^2 + y^2 = 3$, vilket är en cirkel med radie $\sqrt{3}$ med centrum i origo. De tre nivåkurvorna är alltså cirklar med radie 1, $\sqrt{2}$ respektive $\sqrt{3}$, alla med centrum i origo.



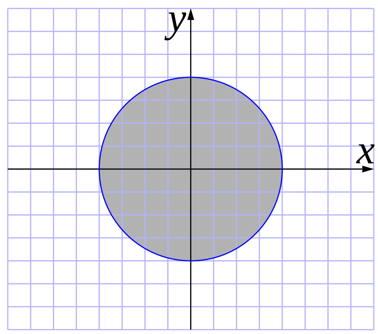
(b) $\mathbf{grad}\, f(x,y) = (-2x, -2y)$. När vi sätter in detta i punkterna får vi

$$
\begin{aligned}
\mathbf{grad}\, f(1,1) &= (-2,-2),\\
\mathbf{grad}\, f(-1,1) &= (2,-2),\\
\mathbf{grad}\, f(1,-1) &= (-2,2),\\
\mathbf{grad}\, f(-1,-1) &= (2,2).
\end{aligned}
$$

När vi ritar in vektorerna i figuren får vi därmed pilar som pekar från var och en av de fyra punkterna till motstående punkt.



(c) För att $g(x,y) = \sqrt{f(x,y)}$ ska vara väldefinierad berhöver $f(x,y) \geq 0$. Detta betyder $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, dvs $x^2 + y^2 \leq 1$. Alltså är detta på enhetscirkelskivan.



Svar.

(a) $c = 0$ ger enhetscirkeln, $c = -1$ ger en cirkel med radie $\sqrt{2}$ och $c = -2$ ger en cirkel med radie $\sqrt{3}$, alla med centrum i origo.

(b) $\mathbf{grad}\, f(1,1) = (-2,-2)$, $\mathbf{grad}\, f(1,-1) = (-2,2)$, $\mathbf{grad}\, f(-1,1) = (2,-2)$, $\mathbf{grad}\, f(-1,-1) = (2,2)$.

(c) $g(x,y)$ är väldefinierad på enhetscirkelskivan, $x^2 + y^2 \leq 1$.

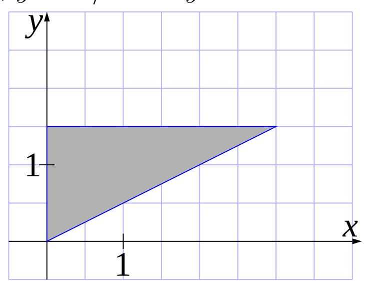
2. Området D i xy-planet beskrivs av olikheterna $0 \leq x \leq 2y \leq 3$.
   (a) Gör en skiss över området D. **(2 p)**
   (b) Beräkna integralen

$$\iint_D e^{y^2}\,dxdy$$

   genom upprepad integration med början i x-led. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi får ett triangulärt område med hörn i punkterna $(0,0)$, $(3,3/2)$ och $(0,3/2)$ som begränsas av linjerna $x=0$, $y=x/2$ och $y=3$.



Vi ser det genom att x måste ligga mellan 0 och 3 och för varje värde på x i det intervallet ligger y i intervallet $x/2$ och 3.

(b) Vi beräknar dubbelintegralen med upprepad integration

$$\begin{aligned}\iint_D e^{y^2}\,dxdy &= \int_0^{3/2}\int_0^{2y} e^{y^2}\,dxdy = \int_0^{3/2}\left[xe^{y^2}\right]_0^{2y}\,dy\\ &= \int_0^{3/2} 2ye^{y^2}\,dy = \left[e^{y^2}\right]_0^{3/2} = e^{9/4}-1.\end{aligned}$$

Svar.

(a) D är en triangel med hörn i punkterna $(0,0)$, $(3,3/2)$ och $(0,3/2)$.

(b) $\displaystyle\iint_D e^{y^2}\,dxdy = e^{9/4}-1.$

3. Funktionen f som ges av $f(x,t) = \sin(3x - 4t)$ uppfyller den partiella differentialekvationen
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$
där c är en konstant.
   (a) Bestäm konstanten c. **(2 p)**
   (b) Visa att $u(x,t) = g(3x-4t)$ och $v(x,t) = g(3x+4t)$ är lösningar till samma differentialekvation om g är en godtycklig två gånger deriverbar funktion. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi beräknar derivatorna och får med hjälp av kedjeregeln att
$$\frac{\partial f}{\partial t} = -4\cos(3x-4t), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -16\sin(3x-4t)$$
och
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3\cos(3x-4t), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -9\sin(3x-4t) = \frac{9}{16}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$
Därmed är $c^2 = 16/9$ och $c = \pm 4/3$.

(b) Vi beräknar derivatorna med hjälp av kedjeregeln och får
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -4g'(3x-4t), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16g''(3x-4t)$$
och
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3g'(3x-4t), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9g''(3x-4t) = \frac{9}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
och eftersom $c^2 = 16/9$ har vi att $u(x,t)$ uppfyller ekvationen. På samma sätt får vi
$$\frac{\partial v}{\partial t} = 4g'(3x+4t), \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 16g''(3x+4t)$$
och
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 3g'(3x+4t), \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 9g''(3x+4t) = \frac{9}{16}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$
och även $v(x,t)$ uppfyller ekvationen.

Svar.

(a) $c = \pm 4/3$.

DEL B

4. Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen $f(x,y) = y^2 + 4x^2 - x^4$. Om man fyller den skål som funktionsytan $z = f(x,y)$ bildar nära origo med vatten, till vilken höjd kan skålen fyllas? **(4 p)**

Lösningsförslag. Funktionen är ett polynom och därmed kontinuerligt deriverbar överallt. Lokala extrempunkter kan därför bara finnas där gradienten är noll. Vi beräknar gradienten som

$$\nabla f(x,y) = \big(8x - 4x^3, 2y\big)\,.$$

Därmed ges de stationära punkterna av lösningarna till

$$\begin{cases} 4x(2-x^2) &= 0 \\ 2y &= 0 \end{cases}$$

Den första ekvationen har lösningarna $x = 0$ och $x = \pm\sqrt{2}$. Den andra ekvationen har endast lösningen $y = 0$. De stationära punkterna ges därmed av $(0,0)$, $(\pm\sqrt{2},0)$.

För att kontrollera att vilka av de stationära punkterna som är lokala extrempunkter kan vi se på Taylorpolynomet av ordning två i de tre statinära punkterna. I origo ges Taylorpolynomet av $4x^2 + y^2$ vilket ger ett lokalt minumum. I punkterna $(\pm\sqrt{2},0)$ har vi andraderivatorna

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8 - 12(\pm\sqrt{2})^2 = -16, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{och} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Därmed är Taylorpolynomet $-8(x - \pm\sqrt{2})^2 + y^2$ som innebär att punkterna är sadelpunkter.

Vi behöver se hur högt över det lokala minimum som ges av origo som de övriga två stationära punkterna ligger på funktionsytan. Vi har $f(0,0) = 0$ och $f(\pm\sqrt{2},0) = 4\cdot 2 - 4 = 4$. Därmed kan skålen fyllas till höjden 4 längdenheter.

Svar. Det finns bara en lokal extrempunkt som är $(0,0)$ och skålen kan fyllas till höjden 4 längdenheter.

5. (a) Bestäm en parameterkurva γ som startar i punkten $(1,0,1)$, slutar i punkten $(0,1,1)$ och ligger på ytan $z = x^2 + y^2$. **(1 p)**

(b) Skriv upp den enkelintegral som behövs för att beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma (y^2 + z)\,dx + 2xy\,dy + x\,dz$$

där γ är kurvan från deluppgift (a). **(1 p)**

(c) Vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2+z, 2xy, x)$ är konservativt och kurvintegralen i deluppgift (b) kan beräknas med hjälp av en potential. Beräkna kurvintegralen med hjälp av potentialen eller genom att beräkna enkelintegralen från deluppgift (b). **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Det finns många olika val, men vi kan t.ex. välja en kurva som ligger i planet $z = 1$ och då ges en parametrisering av $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, där $0 \leq t \leq \pi/2$. En annan lämplig parametrisering är över en rak linje i xy-planet, dvs $\mathbf{r}(t) = (1-t, t, (1-t)^2 + t^2) = (1-t, t, 2t^2 - 2t + 1)$.

(b) Vi får $d\mathbf{r} = (-\sin t, \cos t, 0)\,dt$ och därmed ges kurvlintegralen av

$$\begin{aligned}\int_\gamma (y^2 + z)\,dx + 2xy\,dy + x\,dz &= \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t + 1)(-\sin t) + 2\cos t \sin t \cos t\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (2\cos^2 t \sin t - \sin^3 t - \sin t)\,dt.\end{aligned}$$

Med den andra parametriseringen får vi

$$\begin{aligned}\int_\gamma (y^2 + z)\,dx + 2xy\,dy + x\,dz &= \int_0^1 \big((t^2 + 2t^2 - 2t + 1)(-1) + 2(1-t)t + (1-t)(4t-2)\big)\,dt \\ &= \int_0^1 (-9t^2 + 10t - 3)\,dt.\end{aligned}$$

(c) Om vi vill hitta en potential kan vi börja med att integrera $y^2 + z$ med avseende på x och får $h(x,y,z) = xy^2 + xz + G(y,z)$. Detta ger

$$\nabla h = \left(y^2 + z, 2xy + \frac{\partial G}{\partial y}, x + \frac{\partial G}{\partial z}\right)$$

och vi kan välja $G(y,z) = 0$. Vi kan nu beräkna linjeintegralen som skillnaden i potentialens värde mellan ändpunkt och startpunkt, dvs

$$\int_\gamma (y^2 + z)\,dx + 2xy\,dy + x\,dz = h(0,1,1) - h(1,0,1) = 0 + 0 - 0 - 1 = -1.$$

Om vi i stället väljer att beräkna integralen från den (b) får vi

$$\int_0^{\pi/2} (2\cos^2 t \sin t - \sin^3 t - \sin t)\,dt = \int_0^{\pi/2} (2\cos^2 t - \sin^2 t - 1)\sin t\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} (3\cos^2 t - 2)\sin t\,dt = \big[-\cos^3 t + 2\cos t\big]_0^{\pi/2} = (0-0) - (-1+2) = -1$$

och med den andra parametriseringen

$$\int_0^1 (-9t^2 + 10t - 3)\,dt = \big[-3t^3 + 5t^2 - 3t\big]_0^1 = -3 + 5 - 3 = -1.$$

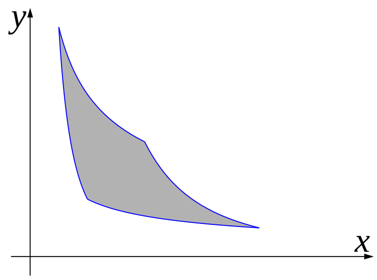
Svar.

(a) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, där $0 \le t \le \pi/2$.

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (2\cos^2 t \sin t - \sin^3 t - \sin t)\,dt$.

(c) $\displaystyle\int_\gamma (y^2 + z)\,dx + 2xy\,dy + x\,dz = -1$

6. Beräkna arean av området D som ges av olikheterna
$$1 \leq xy^2 \leq 8 \quad \text{och} \quad 1 \leq x^2y \leq 8$$
genom att utföra variabelbytet $u = xy^2$, $v = x^2y$ i dubbelintegralen $\iint_D dxdy$. **(4 p)**



Lösningsförslag. Vi börjar med att beräkna Jacobianen för variabelbytet. Vi får
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{bmatrix} y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2 \end{bmatrix} = y^2x^2 - 4(xy)^2 = -3x^2y^2.$$
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{3x^2y^2}.$$
Vi ser att $uv = x^3y^3$, vilket ger $x^2y^2 = (uv)^{2/3}$ och därmed
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{3x^2y^2} = -\frac{1}{3(uv)^{2/3}} = -\frac{1}{3}(uv)^{-2/3}.$$
Observera att vi håller oss i området $1 \leq u \leq 8$ och $1 \leq v \leq 8$, där både u och v är positiva. Integralen som ger arean fås nu som
$$\begin{aligned} \iint_D 1\, dxdy &= \int_1^8 \int_1^8 \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv = \frac{1}{3} \int_1^8 u^{-2/3}\, du \int_1^8 v^{-2/3}\, dv \\ &= \frac{1}{3} \left[3u^{1/3}\right]_1^8 \left[3v^{1/3}\right]_1^8 = \frac{1}{3}(3 \cdot (2-1))(3 \cdot (2-1)) = 3. \end{aligned}$$

Svar. Arean av området är 3 areaenheter.

DEL C

7. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}$ som ges av

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(ax^2 + xy, xy + y^2, byz + b\right),$$

där a och b är konstanter.

(a) Bestäm konstanterna a och b så att fältet blir källfritt.[1] **(2 p)**

(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ genom den del av ytan $x^2 + y^2 + 2z^2 = 3$ som uppfyller $z \geq 0$ för dessa värden på a och b. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Att $\mathbf{F}$ är källfritt betyder att $\mathbf{div}\,\mathbf{F} = 0$, vilket i vårt fall betyder att

$$2ax + y + x + 2y + by = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (2a+1)x + (b+3)y = 0$$

som är uppfyllt för alla x och y precis då $a = -1/2$ och $b = -3$.

(b) I och med att fältet är källfritt kan vi använda divergenssatsen för att säga att flödet upp genom den givna ytan måste vara lika med flödet upp genom cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 3$ i xy-planet. Förutsättningarna för divergenssatsen är uppfyllda i och med att fältet är kontinuerligt deriverbart och randen till området är styckvis slät. Den normerade normalvektorn ges där av $\mathbf{N} = (0,0,1)$ och fältet av $\mathbf{F}(x,y,0) = (xy - x^2/2, xy + y^2, -3)$. Därmed ska vi beräkna

$$\iint_D \mathbf{F}(x,y,0) \cdot \mathbf{N}\, dxdy = \iint_D -3\, dxdy = -9\pi.$$

Om vi hade valt att beräkna flödet ned genom ytan hade vi fått 9π.

Svar.

(a) Vi måste ha $a = -1/2$ och $b = -3$ för att fältet ska vara källfritt.

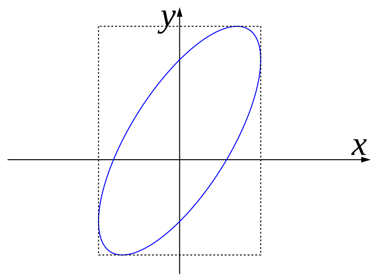
(b) Flödet upp genom ytan ges av -9π.

[1] Källfritt är det samma som *divergensfritt*.

8. Lösningarna till ekvationen

$$2x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y = 17$$

utgör en ellips i xy-planet.



Bestäm den minsta axelparallella rektangel

$$R\colon a \le x \le b, \quad c \le y \le d$$

som innehåller denna ellips. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi kan se problemet som att finna största och minsta värden för funktionerna $f(x,y) = x$ och $g(x,y) = y$ under bivillkoret $h(x,y) = 0$ där $h(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y - 17$.

I dessa punkter ska gradienten för f vara parallell med gradienten för h. Vi har $\nabla f(x,y) = (1,0)$ och $\nabla h(x,y) = (4x-2y+2, 2y-2x-2)$ och dessa är parallella när $2y-2x-2 = 0$, dvs när $y = x+1$. Vi sätter in det i ekvationen $h(x,y) = 0$ och får

$$2x^2 + (x+1)^2 - 2x(x+1) + 2x - 2(x+1) = 17 \Leftrightarrow x^2 = 18 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}$$

vilket ger $y = x+1 = 1 \pm 3\sqrt{2}$. Alltså ges de största och minsta värdena för $f(x,y) = x$ av $\pm 3\sqrt{2}$.

Vi ser nu på största och minsta värde för $g(x,y) = y$. I dessa punkter ska vi ha ∇g parallell med ∇h. Eftersom $\nabla g(x,y) = (0,1)$, ges dessa punkter av $4x - 2y + 2 = 0$, dvs $y = 2x + 1$. Vi sätter in detta i ekvationen $h(x,y) = 0$ och får

$$2x^2 + (2x+1)^2 - 2x(2x+1) + 2x - 2(2x+1) = 17 \Leftrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

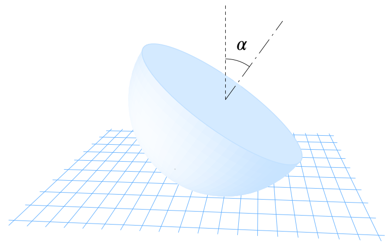
vilket ger $y = 2x + 1 = 1 \pm 6$. Alltså ges de största och minsta värdena för $g(x,y) = y$ av 1 ± 6.

Därmed ges den största axelparallella rektangeln som innesluter ellipsen av $-3\sqrt{2} \le x \le 3\sqrt{2}$ och $-5 \le y \le 7$.

Vi kan också skriva om ekvationen med kvadratkomplettering som $x^2 + (y-x-1)^2 = 18$ där vi kan se övre och undre gränser för x direkt. Genom att lösa ekvationen i y får vi $y = x + 1 \pm \sqrt{18 - x^2}$ och vi kan maximera y som funktion av x som en envariabelfunktion, vilket ger $x = \pm\sqrt{18 - x^2}$ som har lösningar $x = \pm 3$ och $y = 1 \pm 6$ som tidigare.

Svar. Den största axelparallella rektangeln som innesluter ellipsen ges av $-3\sqrt{2} \le x \le 3\sqrt{2}$ och $-5 \le y \le 7$.

9. Ett massivt halvklot K med radie a och konstant densitet ρ placeras på ett horisontellt plan med den sfäriska delen av ytan nedåt och så att dess symmetriaxel bildar vinkeln α mot vertikalen.



Bestäm halvklotets potentiella energi

$$W = \iiint_K \rho g z \, dxdydz,$$

där z anger höjden ovanför planet och g är tyngdkraftaccelerationen. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi kan börja med att bestämma masscentrums läge i relation till halvklotets centrum. Det kan vi göra genom att placera halvklotet i ett koordinatsystem där dess centrum är i origo och där hela K ligger i området där $z \geq 0$. Masscentrum måste av symmetriskäl befinna sig på z-axeln, och vi kan beräkna dess z-koordinat som

$$m_z = \frac{1}{V} \iiint_K z \, dxdydz$$

där V är halvklotets volym, vilket med övergång till cylinderkoordinater blir

$$\begin{aligned} m_z &= \frac{1}{V} \iiint_k zr \, drd\theta dz = \frac{3}{2\pi a^3} \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} zr \, dzdrd\theta \\ &= \frac{3}{2\pi a^3} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\left(\sqrt{a^2-r^2}\right)^2}{2} \cdot r \, dzdrd\theta = \frac{3}{2\pi a^3} \frac{2\pi}{2} \int_0^a \left(a^2 r - r^3\right) \, dr \\ &= \frac{3}{2a^3} \left[\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{3}{2a^3} \left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}\right) = \frac{3a}{8}. \end{aligned}$$

Vi kan nu beräkna den potentiella energin där klotet ligger som $W = \rho V g z_0$ där z_0 är masscentrums höjd över planet $z = 0$, vilket vi får som $z_0 = a - \frac{3a}{8} \cos \alpha$. Alltså ges den potentiella energin av

$$W = \rho \frac{2\pi a^3}{3} g \cdot \frac{8a - 3a\cos\alpha}{8} = \rho g \frac{\pi a^4}{12}(8 - 3\cos\alpha).$$

Ett annat sätt att beräkna detta är genom att använda sfäriska koordinater där vi lägger axeln genom polerna efter den linje på halvklotets platta sida som ligger horisontellt. Integrationsområdet ges då av $0 \leq \phi \leq \pi$, $\alpha \leq \theta \leq \pi + \alpha$ och $0 \leq r \leq a$. Höjden över planet ges av $a - r\sin\phi\sin\theta$ och vi beräknar trippelintegralen

$$\int_0^\pi \int_\alpha^{\pi+\alpha} \int_0^a (a - r\sin\phi\sin\theta) r^2 \sin\phi dr d\theta d\phi = aV - \int_0^\pi \sin^2\phi\, d\phi \int_\alpha^{\pi+\alpha} \sin\theta\, d\theta \int_0^a r^3\, dr$$
$$= \frac{2\pi a^4}{3} - \frac{\pi}{2}\left[-\cos\theta\right]_\alpha^{\pi+\alpha} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{2\pi a^4}{3} - \frac{\pi}{2}\cdot 2\cos\alpha \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4(8 - 3\cos\alpha)}{12}.$$

Vi behöver sedan multiplicera med konstanten ρg för att få den potentiella energin.

Svar. Den potentiella energin är $W = \rho g \dfrac{\pi a^4}{12}(8 - 3\cos\alpha)$.
