Exponentialfunktionen

Exponentiella förlopp med tidkonstanter är mycket vanliga inom så gott som alla fysikaliska tillämpningar.

I stället för att formellt lösa de bakomliggande differentialekvationerna brukar ingenjörer använda ”snabbformler” och ”tumregler”.

Här följer de vanligaste …

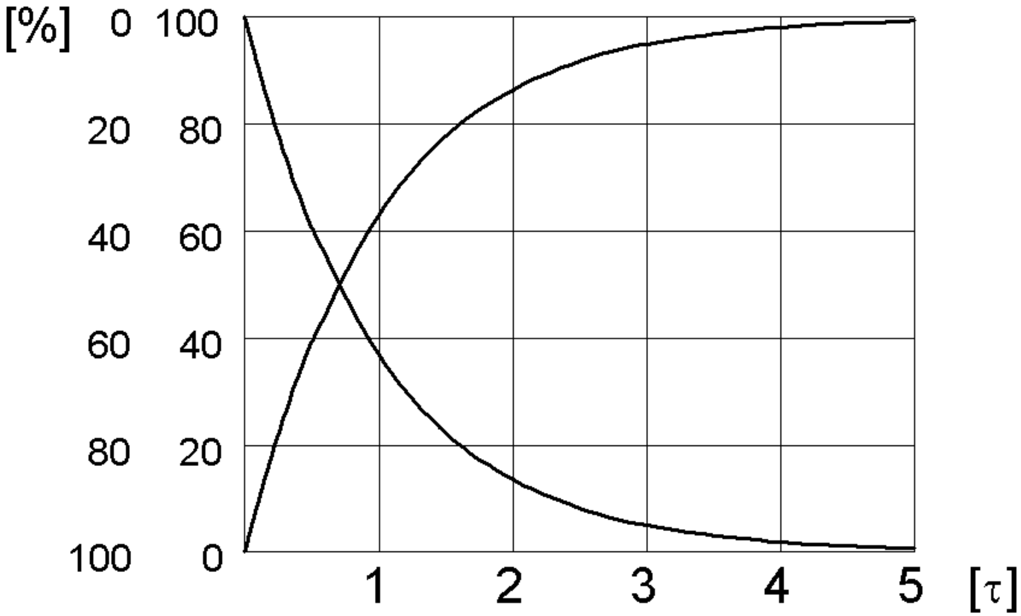
exponentialfunktionen

Stigande kurva

$$x(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Fallande kurva

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Normerat diagram 0…100% och 0…5 τ

Man kan använda detta ”normerade” diagram för att avläsa en uppskattning av vad som händer vid ett exponentiellt förlopp med en tidkonstant.

exponentialfunktionen

Tumregel för 1τ och för 5 τ.

Stigande kurva

$$x(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

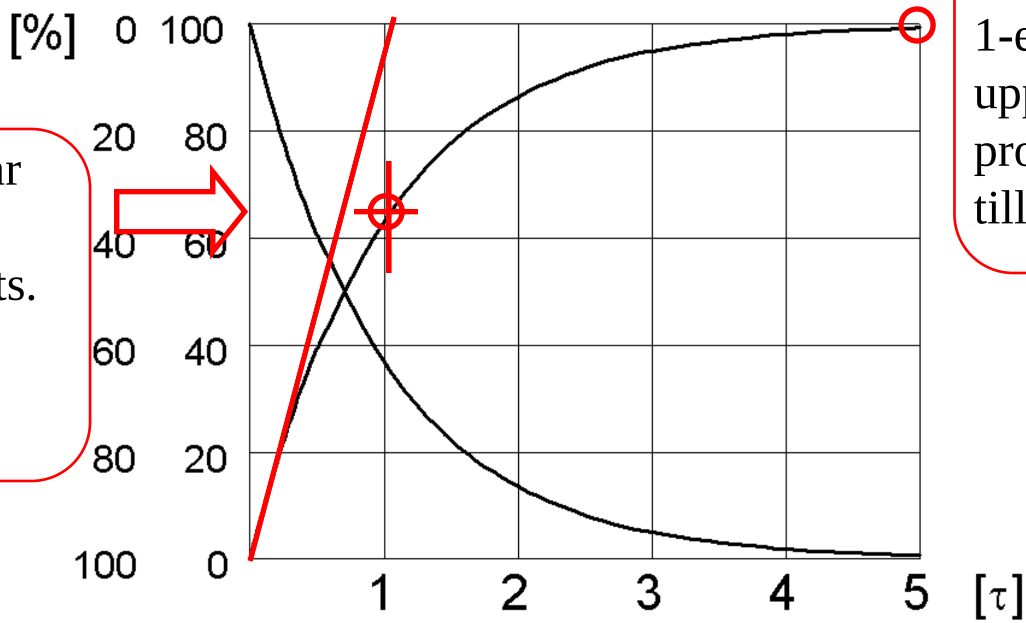
Fallande kurva

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Vid tiden $t = 5 \cdot \tau$ har $1\text{-}e^{-5}$, av slutvärdet uppnåtts. Mindre än 1 promille återstår då till slutvärdet.

Vid tiden $t = \tau$ har $1\text{-}e^{-1}$, **63%** av slutvärdet uppnåtts.

37% återstår till slutvärdet.



- Man brukar därför anse att slutvärdet uppnåtts efter **5 tidkonstanter**.

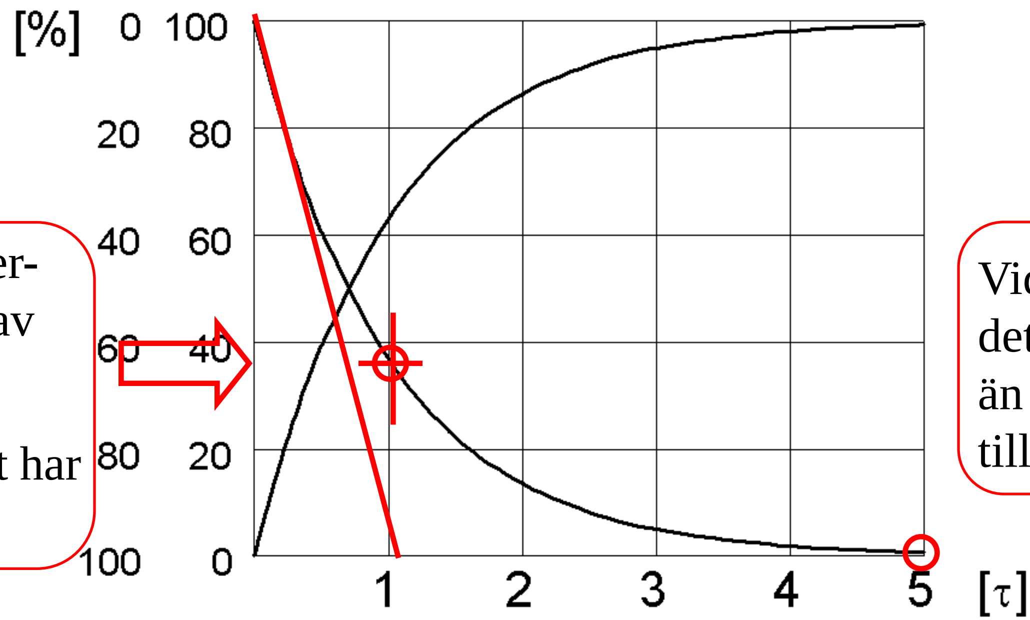
exponentialfunktionen

Stigande kurva

$$x(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Fallande kurva

$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}}$$



Vid tiden $t = \tau$ åter-står det e^{-1}, 37%, av slut-värdet.

67% av slutvärdet har då uppnåtts.

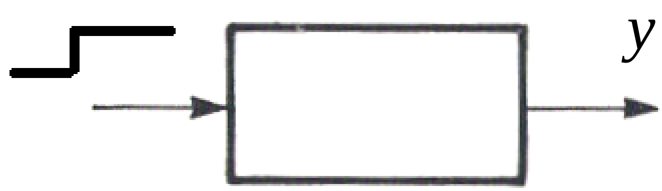
Vid tiden $t = \mathbf{5}\cdot\tau$ är det e^{-5}, dvs. mindre än 1 promille, kvar till slutvärdet.

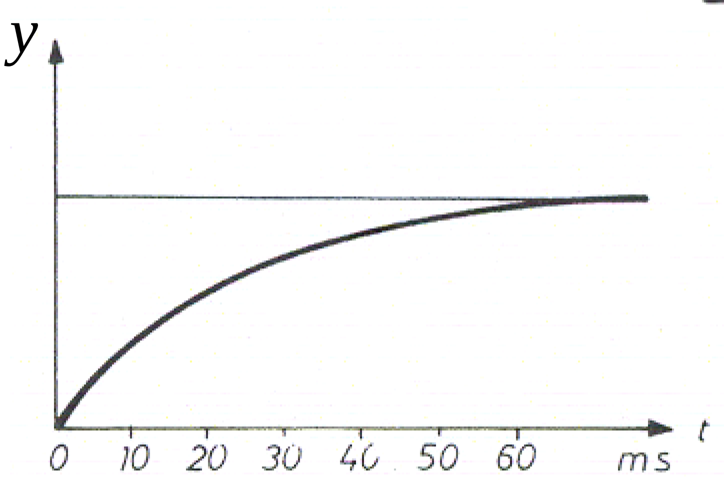
- Man brukar därför anse att slutvärdet uppnåtts efter **5 tidkonstanter**.

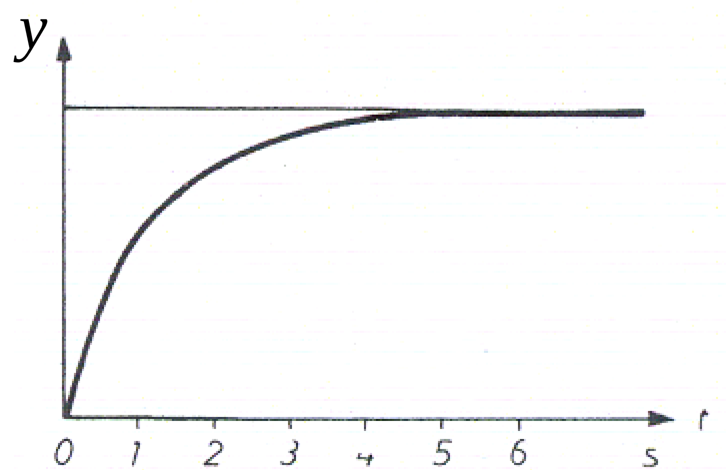
Ex. Snabb uppskattning av tidkonstanten

Figuren visar ”stegsvaret” för två processer med ”en tidkonstant”. Hur stor är tidkonstanten *T* för de båda processerna?

Testsignal: **stegändring (** = slå på strömbrytaren)

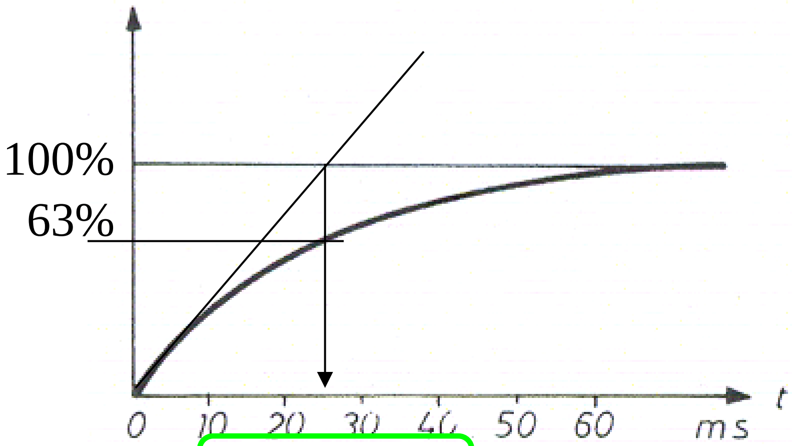




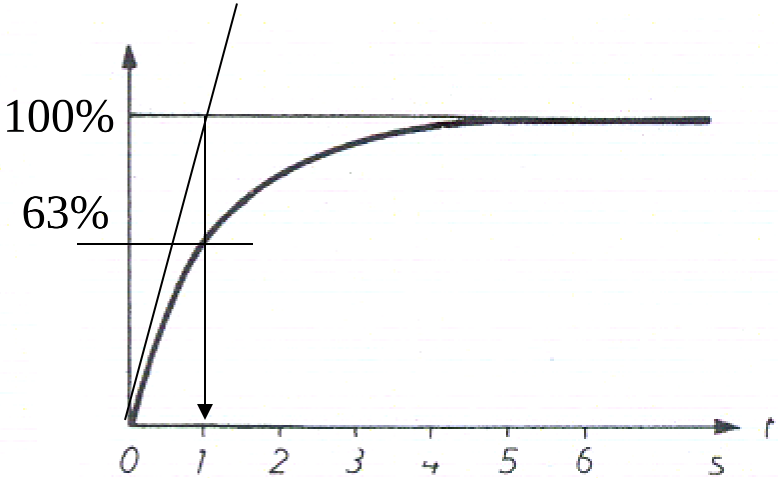


William Sandqvist william@kth.se

Ex. Snabb uppskattning av tidkonstanten



$T \approx 25\,[\mathrm{ms}]$



$T \approx 1\,[\mathrm{s}]$

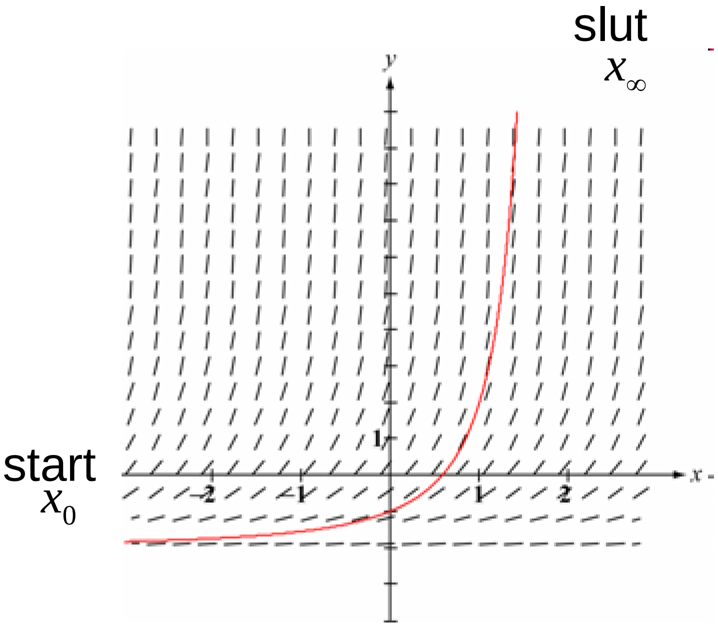
Tidkonstanten där tangenten skär asymtoten, eller vid 63% av slutvärdet.

Differentialekvationer beskriver kurvskaror

Tidkonstanten anger kurvans branthet.

Differentialekvationer beskriver kurvskaror.

Vet vi att kurvan är en exponential-funktion behöver vi *också* veta startvärdet $\boxed{\boldsymbol{x_0}}$ och slutvärdet $\boxed{\boldsymbol{x_\infty}}$ för att kunna ”välja” **rätt kurva**.



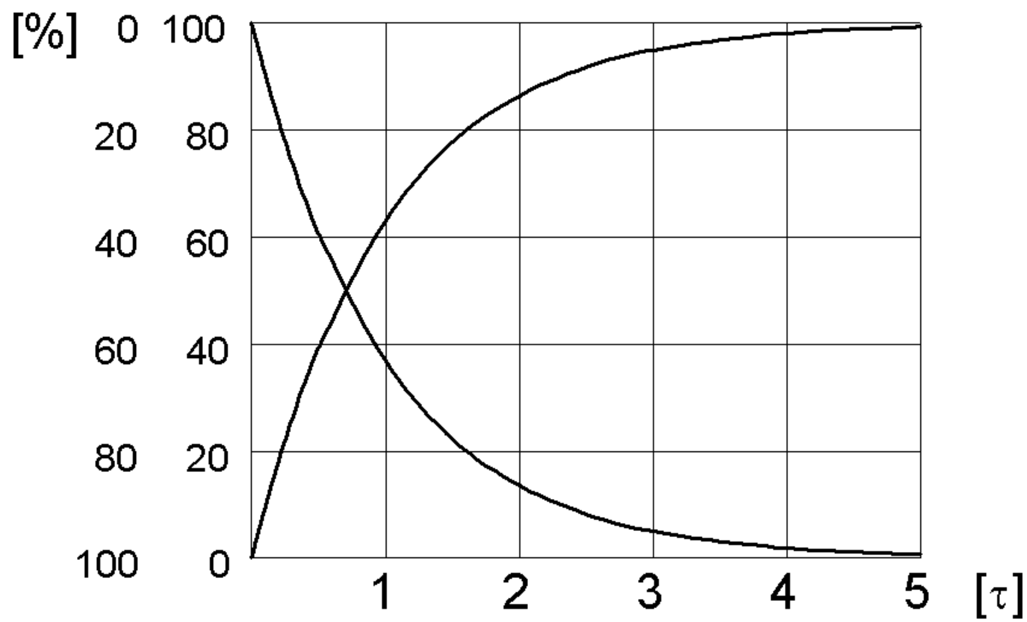
Snabbformel *för exponentialfunktioner*

Typ. Stigande kurva

$$x(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Typ. Fallande kurva

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Snabbformel (ger direkt funktionen för en stigande/fallande kurva):

$\boxed{x_0}$ = storhetens startvärde

$\boxed{x_\infty}$ = storhetens slutvärde

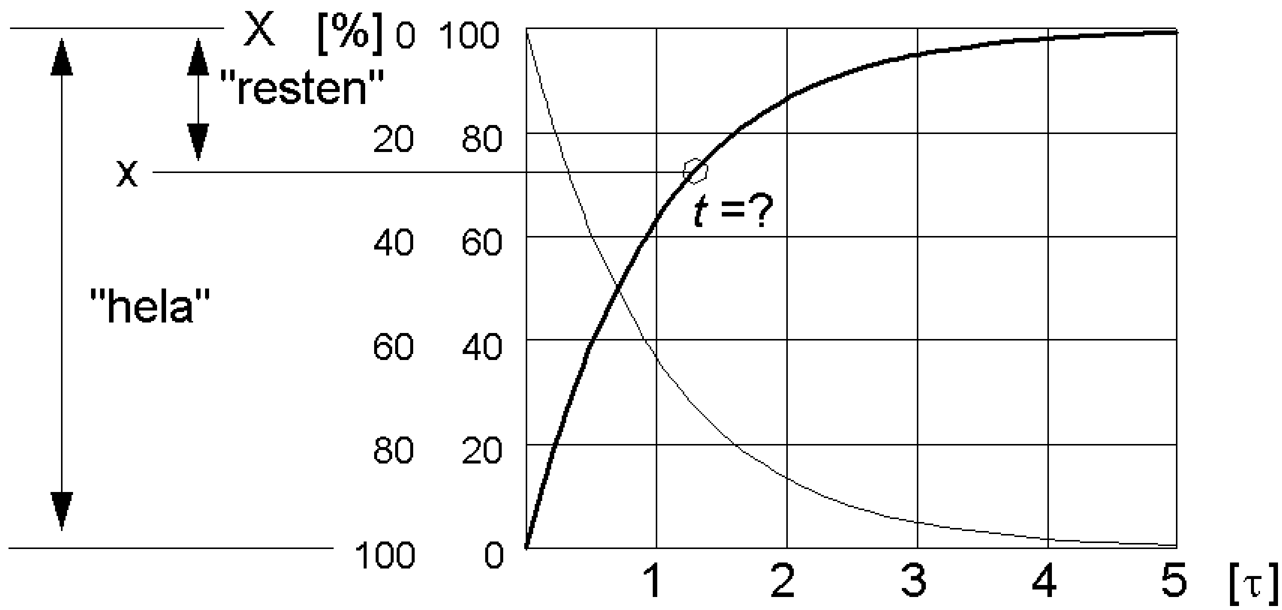
$\boxed{\tau}$ = förloppets tidkonstant

$$\boxed{x(t) = x_\infty - (x_\infty - x_0)e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

William Sandqvist william@kth.se

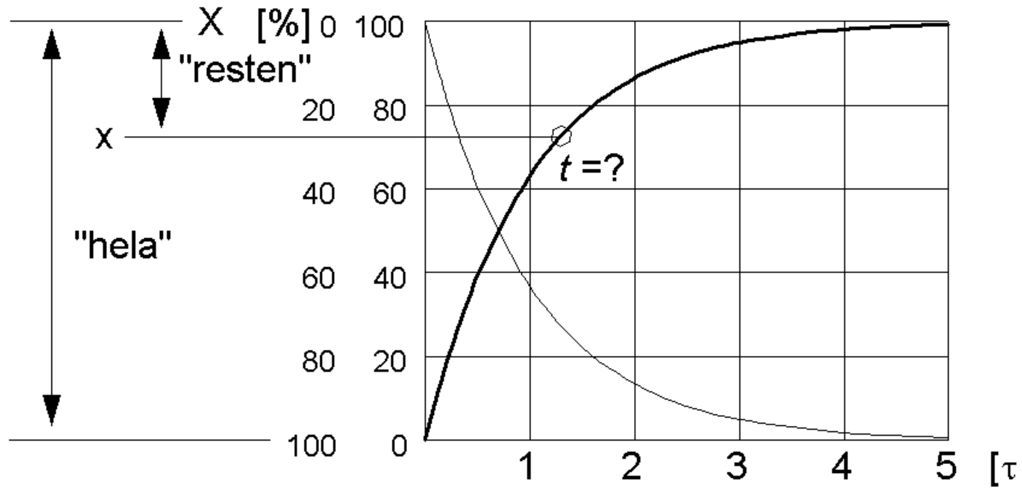
”Hela swinget genom resten”

Stigande kurva. En vanlig frågeställning vid exponentiella förlopp är:
Hur lång tid *t* tar det att nå till *x* ?



”Hela swinget genom resten”

- **Stigande kurva**.

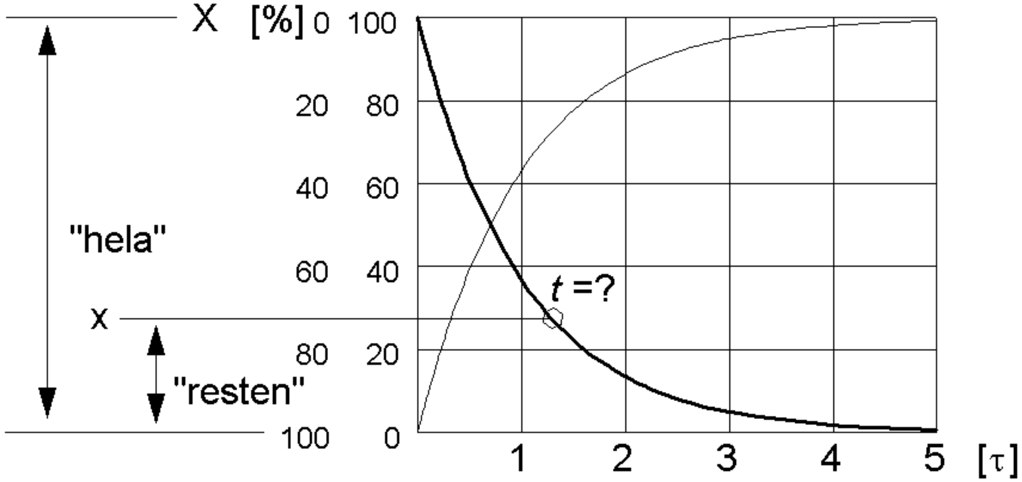


$$x = X(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{X} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(1 - \frac{x}{X}\right) = -\frac{t}{\tau} \quad \Rightarrow \quad t = -\tau \cdot \ln\frac{X - x}{X}$$

$$\boxed{t} = \tau \cdot \ln\frac{X}{X - x} = \boxed{\tau \cdot \ln\frac{\text{"hela"}}{\text{"resten"}}}$$

”Hela swinget genom resten”

- **Fallande kurva**.

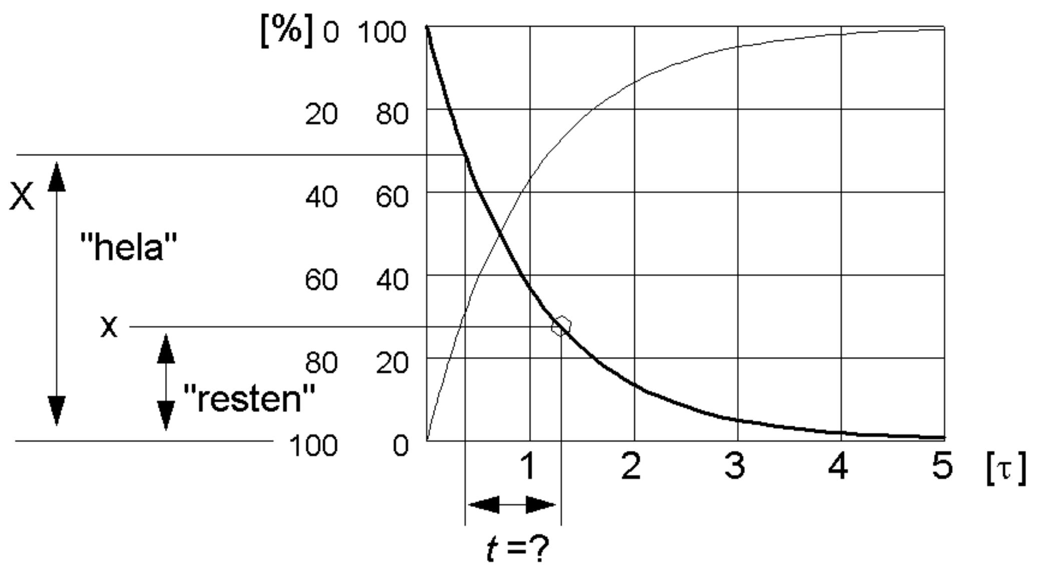


$$x = X \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{X} = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{x}{X} = -\frac{t}{\tau} \quad \Rightarrow \quad t = -\tau \cdot \ln \frac{x}{X}$$

$$\boxed{t} = \tau \cdot \ln \frac{X}{x} = \boxed{\tau \cdot \ln \frac{\text{"hela"}}{\text{"resten"}}}$$

”Hela swinget genom resten”

- **Del av kurva**.



$$\boxed{t = \tau \cdot \ln \frac{\text{"hela"}}{\text{"resten"}}}$$

Gäller alltid vid exponentiella förlopp med tidkonstant!

Ex. Uppmätning, tidtagning, av tidkonstanten

a) För en viss process med ”en tidkonstant” mätte man att det tog 12 sekunder för utsignalen att nå 50% av sitt slutvärde vid en stegformad signaländring. Hur stor är processens tidkonstant?

b) För en annan process tog det 10 minuter att nå 90% av slutvärdet. Hur stor var processens tidkonstant?

Ex. Uppmätning, tidtagning, av tidkonstanten

a) 12 sekunder för 50% $T = ?$

$$t = T \cdot \ln \frac{\text{"hela"}}{\text{"resten"}} \quad \Rightarrow \quad 12 = T \cdot \ln \frac{100-0}{100-50} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{12}{\ln 2} = 17{,}3\,[\mathrm{s}]$$

b) 10 minuter för 90% $T = ?$

$$t = T \cdot \ln \frac{\text{"hela"}}{\text{"resten"}} \quad \Rightarrow \quad 10 = T \cdot \ln \frac{100-0}{100-90} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{10}{\ln 10} = 4{,}34\,[\mathrm{min}]$$