KTH Teknikvetenskap

SF1669 Matematisk och numerisk analys II
Bedömningskriterier till tentamen
Måndagen den 16 mars 2015

Allmänt gäller följande:

- För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.
- Om lösningen helt saknar förklarande text, eller motsvarande förklaring i form av logiska symboler, till beräkningar och formler ges högst två poäng. Detta markeras vid bedömningen med FTS (Förklarande text saknas).
- Om lösningen har förklarande text men inte tillräckligt för att det ska gå att förstå alla steg ges högst tre poäng sammanlagt på uppgiften. Detta markeras med FLFT (För lite förklarande text).
- Mindre räknefel ger i allmänhet inte avdrag om de inte ändrar uppgiftens karaktär eller leder till orimligheter som borde ha upptäckts.
- Lösningen ska kunna läsas av en person som inte är insatt i problemet i förväg. Bevisbördan ligger på den som skriver, inte på den som läser.

(1) Låt $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.

(a) Skissa nivåkurvorna $f(x, y) = c$ till f för $c = 0$, $c = -1$ och $c = -2$. **(1 p)**

(b) Beräkna $\mathbf{grad} f(x, y)$ i de fyra punkterna $(\pm 1, \pm 1)$, på nivåkurvan $f(x, y) = -1$ och rita in dessa vektorer i figuren. **(2 p)**

(c) Vi vill också studera funktionen $g(x, y) = \sqrt{f(x, y)}$. I vilka punkter (x, y) i $\mathbb{R}^2$ är funktionen g väldefinierad? Skissera denna punktmängd. **(1 p)**

Bedömning: Uppgiften testar förståelse av begreppen *nivåkurva*, *gradient* och *definitionsområde*.

(a) • Principellt korrekta nivåkurvor, **1 poäng**.

(b) • Korrekt beräkning av gradienten, **1 poäng**.
• Korrekt Illustration av gradienterna i figuren, **1 poäng**.

(c) • Korrekt motiverat definitionsområde inlusive skiss, **1 poäng**.

(2) Området D i xy-planet beskrivs av olikheterna $0 \leq x \leq 2y \leq 3$.

(a) Gör en skiss över området D. **(2 p)**

(b) Beräkna integralen

$$\iint_D e^{y^2}\, dxdy$$

genom upprepad integration med början i x-led. **(2 p)**

Bedömning: Första delen av uppgiften testar förmågan att gå från en beskriving av ett område med olikheter till en geometrisk beskrivning. Andra delen av uppgiften testar förmågan att använda upprepad integration för beräkning av dubbelintegraler över områden som inte är rektanglar.

(a)
- Korrekt uppritat område, **1 poäng**.
- Korrekt motivering till området, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt integration i x-led, **1 poäng**.
- Korrekt fullföljd beräkning av integralen, **1 poäng**.

(3) Funktionen f som ges av $f(x,t) = \sin(3x - 4t)$ uppfyller den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

där c är en konstant.

(a) Bestäm konstanten c. **(2 p)**

(b) Visa att $u(x,t) = g(3x - 4t)$ och $v(x,t) = g(3x + 4t)$ är lösningar till samma differentialekvation om g är en godtycklig två gånger deriverbar funktion. **(2 p)**

Bedömning: Uppgiften ska testa förmågan att använda kedjeregeln för partiella derivator, såväl i konkret exempel som med en allmän funktion.

(a)
- Korrekt beräkning av andraderivatorna, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad konstant c, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt användning av kedjeregeln för beräkning av andraderivatorna, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd motivering till att funktionerna uppfyller differentialekvationen, **1 poäng**.

(4) Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen $f(x, y) = y^2 + 4x^2 - x^4$. Om man fyller den skål som funktionsytan $z = f(x, y)$ bildar nära origo med vatten, till vilken höjd kan skålen fyllas? **(4 p)**

Bedömning: Uppgiften testar förståelsen för begreppet *lokal extrempunkt* och förmågan att skilja mellan olika typer av stationära punkter. Andra delen av uppgiften testar förmågan att använda informationen som ges av de stationära punkternas karaktär för att lösa ett geometriskt problem.

- Korrekt beräkning av alla tre stationära punkter, **1 poäng**.
- Korrekt motivering till att $(0, 0)$ är lokalt minimum, **1 poäng**.
- Korrrekt motivering till att övriga stationära punkter inte är lokala extrempunkter, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad höjd för vattenytan i skålen, **1 poäng**.

---

(5) (a) Bestäm en parameterkurva γ som startar i punkten $(1, 0, 1)$, slutar i punkten $(0, 1, 1)$ och ligger på ytan $z = x^2 + y^2$. **(1 p)**

(b) Skriv upp den enkelintegral som behövs för att beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma (y^2 + z)\,dx + 2xy\,dy + x\,dz$$

där γ är kurvan från deluppgift (a). **(1 p)**

(c) Vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 + z, 2xy, x)$ är konservativt och kurvintegralen i deluppgift (b) kan beräknas med hjälp av en potential. Beräkna kurvintegralen med hjälp av potentialen eller genom att beräkna enkelintegralen från deluppgift (b). **(2 p)**

Bedömning: Uppgiften testar förmågan att använda parametrisering vid beräkning av kurvintegraler. Den sista delen testar alternativt förmågan att använda potentialer vid beräkning av kurvintegraler av vektorfält.

(a)
- Korrekt parameterkurva på ytan med angivna start- och ändpunkter, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt uppställd enkelintegral för beräkning av kurvintegralen, inklusive integrationsgränser och integrand, **1 poäng**.

(c)
- Principiellt korrekt integration, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd integration, **1 poäng**.

(d) Alternativt
- Korrekt bestämd potential, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av kurvintegralen med hjälp av potentialen, **1 poäng**.

---

(6) Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} e^x \cos(y) &= a, \\ e^y \sin(z) + y^2 &= b, \\ e^z \cos(x) &= c. \end{cases}$$

(a) Skriv en Matlab-funktion `[x,y,z] = G(a,b,c)` som löser systemet med Newtons metod för givna värden på (a, b, c) nära $(3, 1, 3)$. Systemet har då en rot nära $(x, y, z) = (1, 0, 2)$. Felet i varje komponent ska vara mindre än 10^{-10}. **(3 p)**

(b) Antag att högerleden är givna som $a = 3 \pm 0{,}1$, $b = 1 \pm 0{,}05$ och $c = 3 \pm 0{,}2$. Skriv ett Matlab-program som uppskattar osäkerheten i lösningens x-komponent med hjälp av funktionen från deluppgift (a). Programmet ska anropa funktionen högst fyra gånger. **(1 p)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt användning av Newtons metod, **1 poäng**.
- Korrekt hantering av startvärde eller stoppvillkor, **1 poäng**.
- Principiellt korrekt färdigt Matlab-funktion, **1 poäng**.

(b)
- Principiellt korrekt Matlab-kod för störningsräkningen, **1 poäng**.

---

(7) Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}$ som ges av

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(ax^2 + xy, xy + y^2, byz + b\right),$$

där a och b är konstanter.

(a) Bestäm konstanterna a och b så att fältet blir källfritt.[1] **(2 p)**

(b) Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ genom den del av ytan $x^2 + y^2 + 2z^2 = 3$ som uppfyller $z \geq 0$ för dessa värden på a och b. **(2 p)**

Bedömning: Uppgiften testar förståelsen för begreppet *källfritt vektorfält* och förmågan att använda divergenssatsen vid beräkning av flödesintegraler genom ytor.

(a)
- Korrekt användning av begreppet *källfritt* (*divergensfritt*), **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av konstanterna för att fältet ska vara källfritt, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt motivering till varför divergenssatsen kan användas, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad beräkning av flödet genom ytan (med vald orientering), **1 poäng**.

---

[1] Källfritt är det samma som *divergensfritt*.

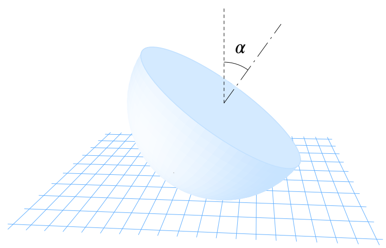
(8) Betrakta en cylinder parallell med z-axeln och med botten vid $z = 0$. Cylindern har höjden h, tvärsnittsarean A och densitetsprofilen $\rho(x, y, z) = 1 + z$. Uppskatta felgränsen för cylinderns massa om $h = 1 \pm 0{,}01$ cm och $A = 2 \pm 0{,}04$ cm^2. **(4 p)**

Bedömning:

- Korrekt beräkning av massan, **1 poäng**.
- Principiellt korrekt formel för felet, **1 poäng**.
- Korrekt användning av de partiella derivatorna, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av felgränserna, **1 poäng**.

---

(9) Ett massivt halvklot K med radie a och konstant densitet ρ placeras på ett horisontellt plan med den sfäriska delen av ytan nedåt och så att dess symmetriaxel bildar vinkeln α mot vertikalen.



Bestäm halvklotets potentiella energi

$$W = \iiint_K \rho g z \, dxdydz,$$

där z anger höjden ovanför planet och g är tyngdkraftaccelerationen. **(4 p)**

Bedömning: Uppgiften testar förmågan att använda trippelintegraler vid mer tillämpade problem som inte är tillrättalagda när det gäller till exempel val av koordinatsystem.

- Korrekt uppställd trippelintegral i något valt koordinatsystem, inklusive integrationsgränser, **1 poäng**.
- Principiellt korrekt integration, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av den potentiella energin, **2 poäng**.
