SF1625 Envariabelanalys
Tentamen
Fredagen den 7 april 2015

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Lars Filipsson

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del A på tentamen utgörs av de första tre uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng upp till som mest 12 poäng. Poängsumman på del A kan alltså högst bli 12 poäng, bonuspoängen medräknade. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antalet bonuspoäng framgår av din resultatsida.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de sista tre uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

1. Låt $f(x) = \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2}$.
   A. Bestäm definitionsmängden till funktionen f.
   B. Bestäm funktionens största och minsta värde.

   (Om du har glömt bort derivatan av arcsin x så kan du härleda den genom implicit derivering av sambandet** $\sin(\arcsin x) = x$**. Om du minns den behöver du inte härleda den.)

2. Avgör om det är sant att $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\,dx < 2$.

3. Odämpad svängning beskrivs av differentialekvationen

   $$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

   där $y(t)$ är avvikelsen från jämviktsläget vid tidpunkten t och ω är en konstant.
   A. Lös differentialekvationen om $\omega = 4$.
   B. Finn den lösning till differentialekvationen (fortfarande med $\omega = 4$) som också uppfyller att $y(0) = -6$ och $y'(0) = 32$.
   C. Bestäm perioden och amplituden hos din lösning.

DEL B

4. A. Beräkna arean av det område som ligger mellan kurvorna $y = 1$ och $y = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x + 3}$, för x i intervallet $0 \leq x \leq R$.

   B. Avgör om det område som ligger mellan kurvorna $y = 1$ och $y = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x + 3}$, för x i intervallet $0 \leq x < \infty$, har ändlig area. Beräkna i så fall denna area.

5. Låt $f(x) = 1 - (x - 1)^2$, $0 \leq x \leq 2$. Gör en enkel skiss av funktionsgrafen $y = f(x)$ och finn den punkt (x_0, y_0) på funktionsgrafen som gör arean av triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(x_0, 0)$ och (x_0, y_0) maximal.

6. Beräkna, t ex med hjälp av variabelsubstitution eller partiell integration, integralen

$$\int_0^1 x\sqrt{1 - x}\, dx$$

Var god vänd!

DEL C

7. A. Formulera differentialkalkylens medelvärdessats.
   B. Använd den för att visa att en funktion vars derivata är noll i ett öppet intervall måste vara konstant i intervallet.

8. Låt f vara en tre gånger deriverbar funktion på intervallet $-1 < x < 2$, sådan att $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = 6$ och $|f'''(x)| \leq 1$ för alla x i intervallet. Visa att
$$1 - \frac{1}{24} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq 1 + \frac{1}{24}.$$

9. Avgör om det finns någon lösning $y(t)$ till differentialekvationen
$$y''(t) + y(t) = e^t$$
sådan att kvoten $y(t)/t^2$ är begränsad när $t \to 0$. Bestäm en sådan lösning, om en sådan lösning finns. Kan det finnas flera?