REGLERTEKNIK

KTH

REGLERTEKNIK AK EL1000/EL1110/EL1120

Tentamen 2015–04–08, kl. 8.00–13.00

Hjälpmedel: Kursboken i Reglerteknik AK (Glad, Ljung: Reglerteknik eller motsvarande)
räknetabeller, formelsamlingar och räknedosa.
Observera att övningsmaterial (övningsuppgifter, ex-tentor och lösningar) INTE är tillåtna hjälpmedel.

Observandum: Behandla inte mer än en uppgift per blad.
Varje steg i lösningen skall motiveras.
Bristfällig motivering kan ge poängavdrag.
Skriv svar (med enhet i förekommande fall).
Skriv namn och personnummer på varje inlämnat ark.
Skriv endast på en sida per ark.
Fyll i antalet inlämnade ark på omslaget.

Tentamen består av fem uppgifter, som vardera bedöms med 10 poäng.
Poängsättningen för deluppgifter har markerats.

Betygsgränser: betyg Fx: ≥ 21
betyg E: ≥ 23
betyg D: ≥ 28
betyg C: ≥ 33
betyg B: ≥ 38
betyg A: ≥ 43

Ansvarig lärare: Henrik Sandberg, 08-790 7294

Resultat: Anslås på

`https://www.kth.se/student/minasidor`

senast 2015-04-29.

Lycka till!

---

1. Låt oss betrakta ett öppet system som beskrivs av

$$Y(s) = G(s)U(s),$$

där $G(s)$ är systemets överföringsfunktion, och $U(s)$ och $Y(s)$ är in- och utsignalernas Laplacetransformer. Systemet $G(s)$ har alla poler och nollställen strikt i vänstra komplexa halvplanet, och dess bodediagram visas i figur 1. Använd detta diagram för att besvara följande frågor.

(a) Låt oss studera följande insignaler,

$$u_1(t) = \sin(0.1t), \quad u_2(t) = \cos(t).$$

Vad blir den stationära utsignalen då insignalen är $u_1(t) + u_2(t)$? (Med stationära utsignalen menas utsignalen för stora tider t, då eventuella transienter försvunnit.)

(2p)

(b) Vi väljer nu att återkoppla $G(s)$ med en P-regulator med förstärkningen K. Slutna systemets överföringsfunktion $G_c(s)$ ges av

$$Y(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} R(s) = G_c(s)R(s),$$

där $R(s)$ är referenssignalens Laplacetransform.

i. Ange fasmarginal φ_m och amplitudmarginal A_m för kretsförstärkningen $KG(s)$ då $K = 1$ och då $K = 5$.

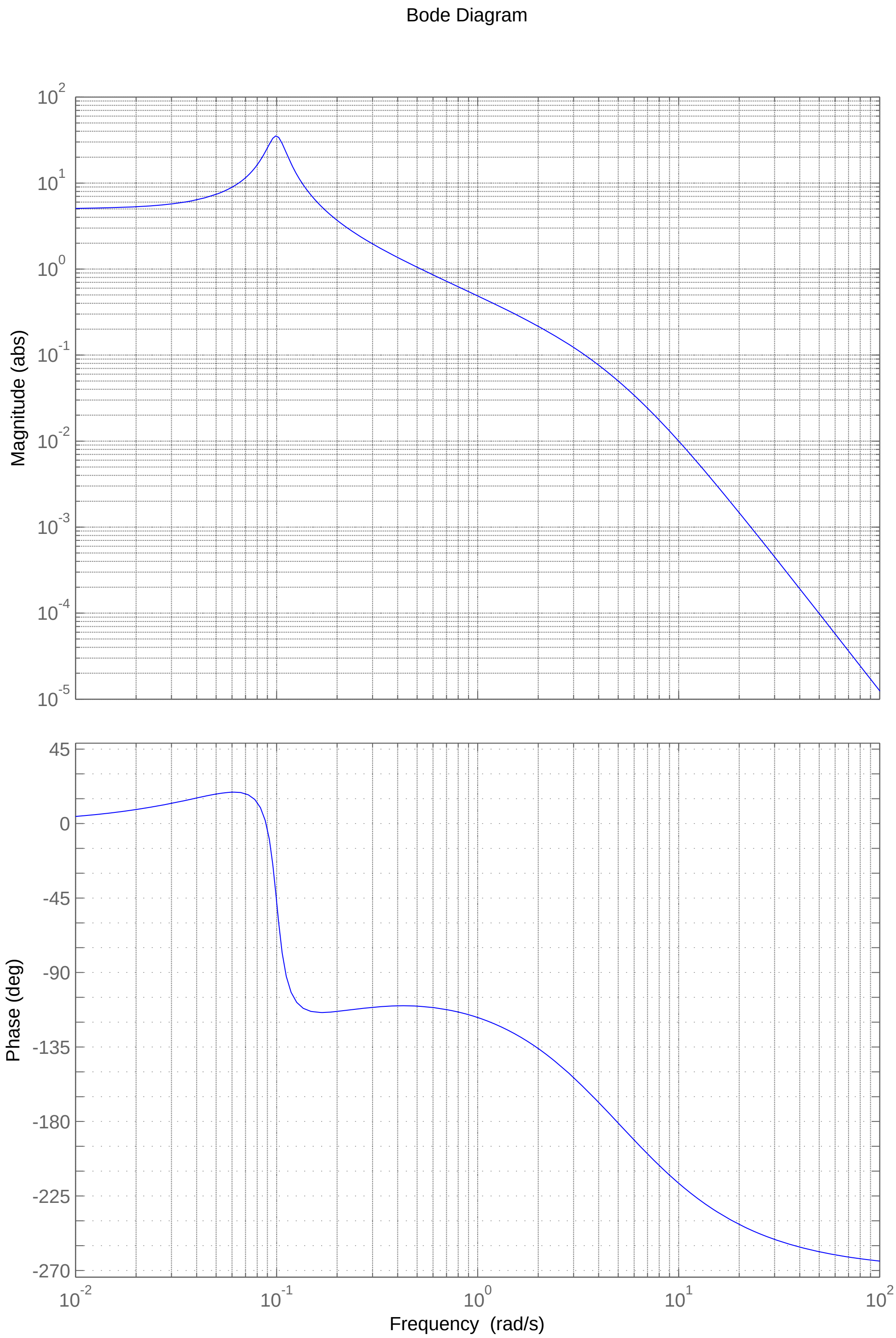
(4p)

ii. Antag att vi applicerar ett steg i referenssignalen ($r(t) = 1$, $t \geq 0$). Vad blir slutvärdet av slutna systemets utsignal då $K = 10$?

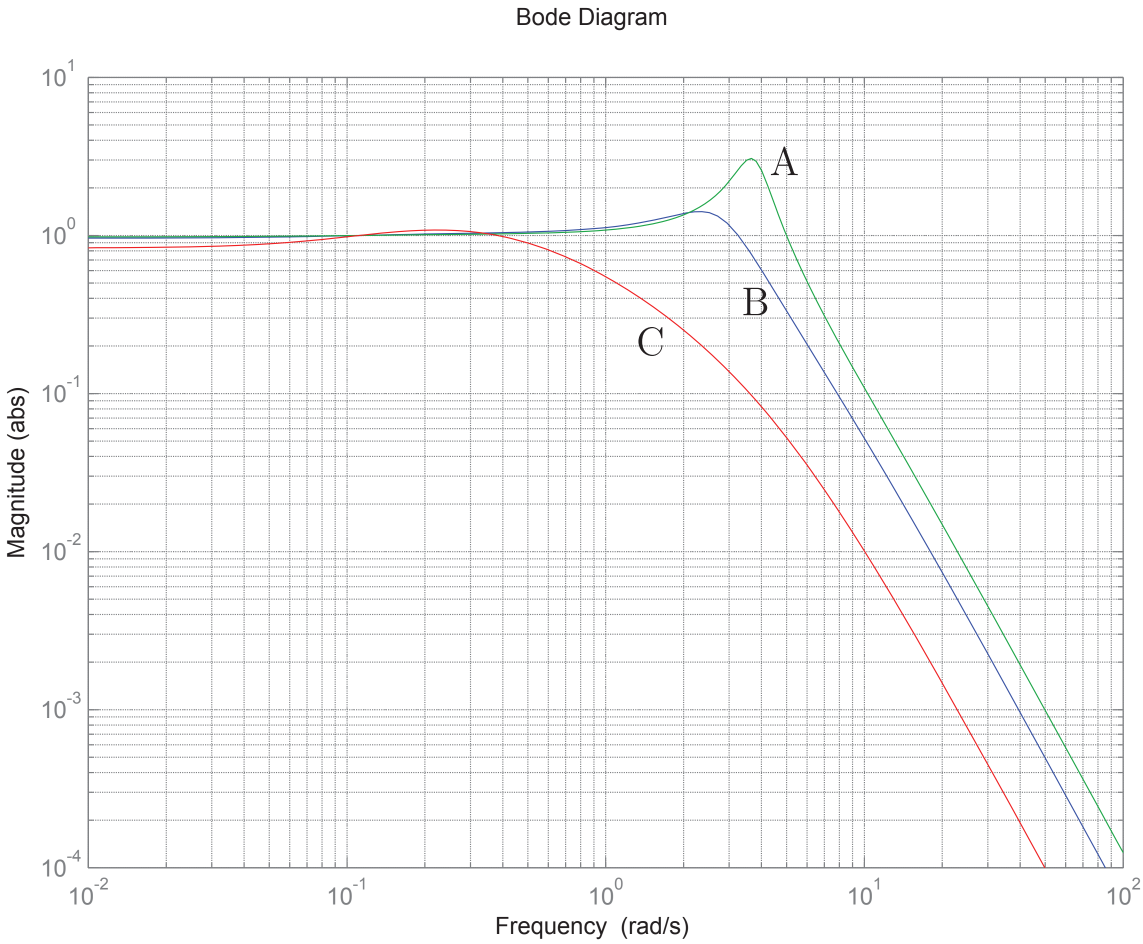
(2p)

iii. Förstärkningen av $G_c(s)$ för $K = 1$, $K = 5$ och $K = 10$ visas i figur 2. Para ihop kurvorna A, B och C med $K = 1$, $K = 5$ och $K = 10$. Motivera kort dina svar!

(2p)



Figur 1: Bodediagram av $G(s)$ för uppgift 1.



Figur 2: Bodediagram av $G_c(s)$ för uppgift 1.

2. Låt oss studera följande system på tillståndsform

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{1}$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \end{pmatrix},$$

och $u(t)$ är styrsignal, $y(t)$ är utsignal och α är en konstant parameter.

(a) Antag att $\alpha = 1$. Avgör om systemet (1) är observerbart från $y(t)$.

(2p)

(b) Antag att $\alpha = 2$ och designa sedan om möjligt en observatör på formen

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu(t) + K[y(t) - C\hat{x}(t)]$$

för systemet (1), så att egenvärdena till $A - KC$ ligger i $\{-4, -4\}$.

(Här är K en vektor av lämplig storlek.)

(4p)

(c) Antag att $\alpha = 2$ och att vi ska designa en regulator på formen

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + K[y(t) - C\hat{x}(t)] \\ u(t) &= -L\hat{x}(t) + l_0 r(t) \end{aligned}$$

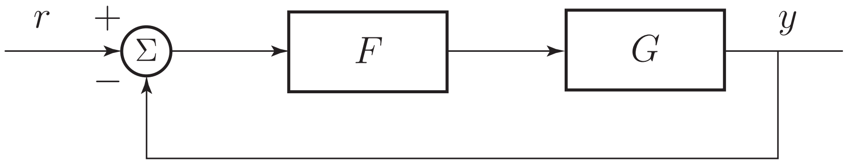
för systemet (1), där $r(t)$ är en referenssignal.
Använd det K du fick i deluppgift (b) och välj sedan parametrarna L och l_0 så att slutna systemets överföringsfunktion från $r(t)$ till $y(t)$, det vill säga $G_r(s)$ i Laplacetransformen $Y(s) = G_r(s)R(s)$, uppfyller följande specifikationer:

i. Polerna till $G_r(s)$ ligger i $\{-2, -2\}$.

ii. Statiska förstärkningen är 1 ($G_r(0) = 1$).

(*Ledning: Använd resultat från avsnitt 9.5 i kursboken.*)

(4p)



Figur 3: Blockschema för uppgift 3.

3. Betrakta det återkopplade systemet i figur 3, där systemet som ska styras har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3},$$

och en regulator $F(s)$ ska konstrueras. Bodediagram för $G(s)$ visas i figur 4.

(a) Hur snabbt kan det återkopplade systemet göras med en P-regulator $F(s) = K$, $K > 0$, om fasmarginalen för det kompenserade öppna systemet inte får bli mindre än 45°? (Du kan identifiera snabbhet med kompenserade öppna systemets skärfrekvens.)

(3p)

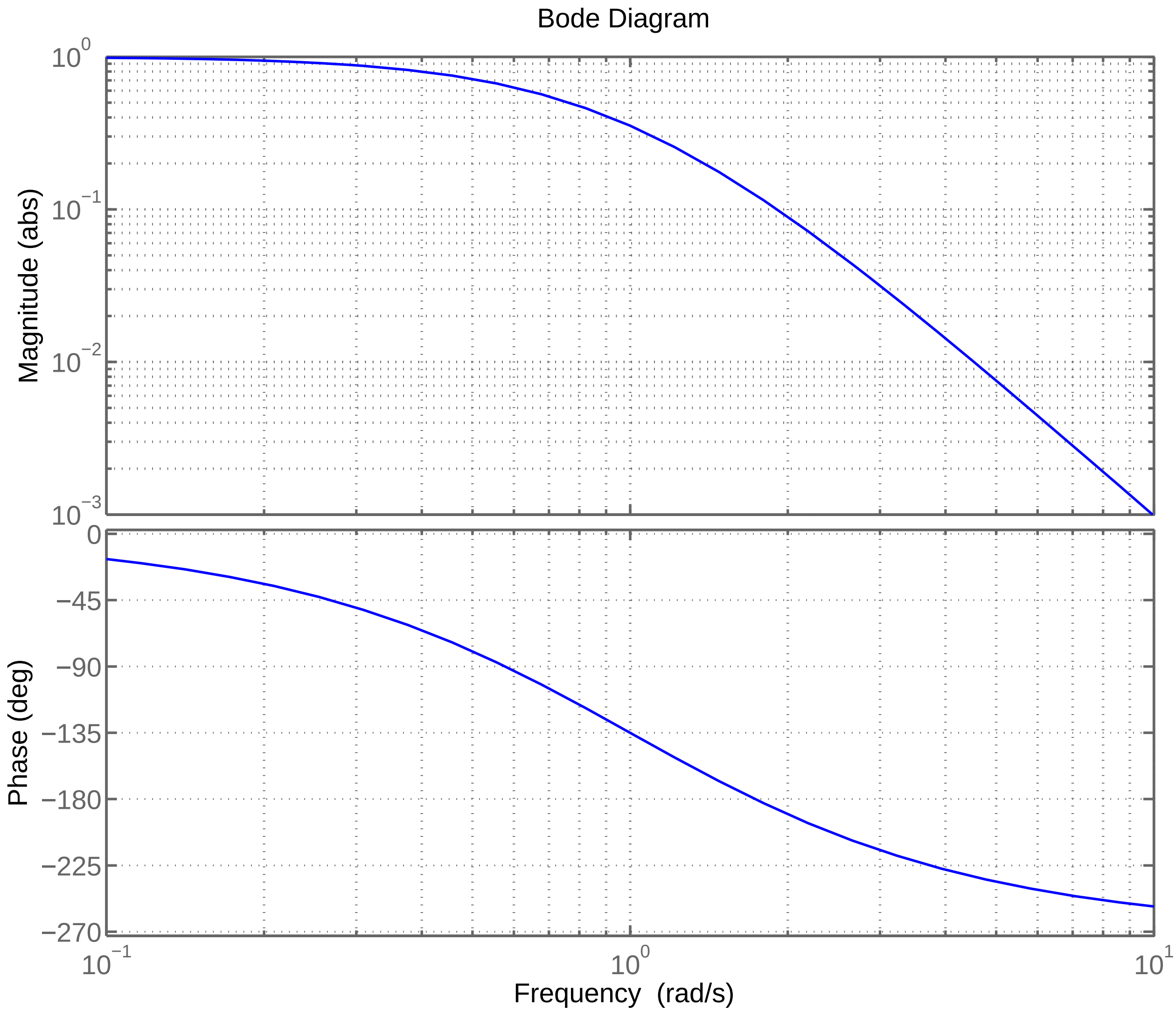
(b) Med regulatorn i deluppgift (a) bedöms det återkopplade systemet vara tillräckligt robust, men det är inte snabbt nog och det statiska reglerfelet är för stort. Ta därför fram en kompenseringslänk $F(s)$ som uppfyller samtliga följande specifikationer:

i. Det återkopplade systemets statiska reglerfel då $r(t) = 1$, $t \geq 0$ (en stegsignal) ska vara 0.

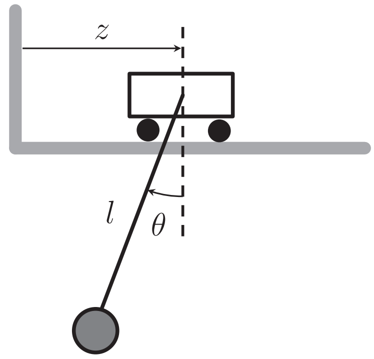
ii. Det återkopplade systemet ska vara fyra gånger så snabbt som det i deluppgift (a).

iii. Fasmarginalen för det kompenserade öppna systemet ska vara 45°.

(7p)



Figur 4: Bodediagram för uppgift 3.



Figur 5: Vagnen med pendel i uppgift 4.

4. Betrakta vagnen med pendel i figur 5. Detta system kommer att användas i miljöer med varierande tyngdaccelaration, vilket motiverar följande studie. Kring sitt nedre jämviktsläge kan pendeln modelleras av överföringsfunktionen

$$G^0(s) = \frac{1}{s^2 + g},$$

där tyngdaccelarationen g kan variera. Insignalen är $u(t) = \ddot{z}(t)$ och utsignalen är $y(t) = \theta(t)$. Vi antar i hela denna uppgift att man (negativt) återkopplar $G^0(s)$ med en regulator med överföringsfunktionen

$$F(s) = \frac{s}{s + 1}.$$

(a) Skriv ekvationen för slutna systemets poler (karakteristiska ekvationen) på formen

$$P(s) + gQ(s) = 0,$$

där $P(s)$ och $Q(s)$ är fixa polynom och g är tyngdaccelarationen. Skissa sedan rotorten för slutna systemets poler med avseende på $g > 0$ så noggrant du kan, och avgör för vilka g slutna systemet är asymptotiskt stabilt.

(5p)

(b) Antag att vi i regulatordesignen använt pendelmodellen $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + 9}$. Ta fram den relativa modellosäkerheten $\Delta_G(s)$, definierad enligt

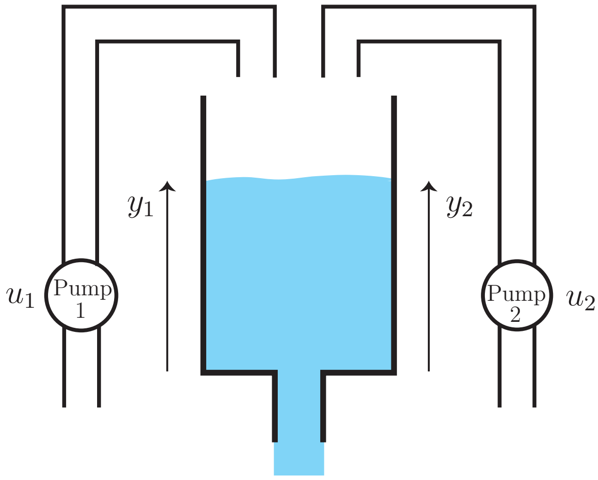
$$G^0(s) = G(s)(1 + \Delta_G(s)),$$

och använd robusthetskriteriet (Resultat 6.2 i kursboken) för att analysera för vilka $g > 0$ regulatorn $F(s)$ gör slutna systemet asymptotiskt stabilt.

(4p)

(c) Vad beror det på att även korrekta analyser enligt deluppgift (a) och (b) kan ge olika svar på vilka g som gör slutna systemet asymptotiskt stabilt?

(1p)



Figur 6: Vattentanken i uppgift 5.

5. En ingenjör ska implementera en PI-regulator för att styra vätskenivån i en tank. Det visar sig att det inte räcker med en pump för att hålla den önskade nivån eftersom utflödeshålet är stort. Ingenjören bestämmer sig då för att installera två pumpar med varsin PI-regulator enligt figur 6.

   Kring en stationär punkt har tanken dynamiken

$$\frac{d}{dt}h(t) = -h(t) + u_1(t) + u_2(t),$$

   där $h(t)$ är vätskenivån.

   Tillflödet från pumparna ges av

$$\begin{aligned} u_1(t) &= K_1[r(t) - y_1(t)] + K_2 \int_0^t [r(\tau) - y_1(\tau)]\, d\tau, \quad K_1 > 0,\ K_2 > 0 \\ u_2(t) &= K_3[r(t) - y_2(t)] + K_4 \int_0^t [r(\tau) - y_2(\tau)]\, d\tau, \quad K_3 > 0,\ K_4 > 0, \end{aligned}$$

   där K_1, K_2, K_3 och K_4 är regulatorparametrar och $r(t)$ är nivåreferensen.

   Mätsignalerna kan modelleras som

$$\begin{aligned} y_1(t) &= h(t) + m_1(t) \\ y_2(t) &= h(t) + m_2(t), \end{aligned}$$

   där $m_1(t)$ och $m_2(t)$ är mätbrus.

(a) i. Ställ upp en tillståndsmodell för det återkopplade systemet på formen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_r r(t) + B_{m_1} m_1(t) + B_{m_2} m_2(t) \\ y_1(t) &= C_1 x(t) + m_1(t) \\ y_2(t) &= C_2 x(t) + m_2(t),\end{aligned} \tag{2}$$

där du använder tillstånden

$$\begin{aligned}x_1(t) &= h(t) \\ x_2(t) &= \int_0^t [r(\tau) - y_1(\tau)]\, d\tau \\ x_3(t) &= \int_0^t [r(\tau) - y_2(\tau)]\, d\tau.\end{aligned}$$

(Det vill säga, bestäm A, B_r, B_{m_1}, B_{m_2}, C_1 och C_2 för dessa tillstånd.)

(5p)

ii. Är det återkopplade systemet (2) styrbart från referenssignalen $r(t)$?

(3p)

(b) När det återkopplade systemet inte fungerar som önskat så föreslår en kollega till ingenjören att ta bort mätsensorn $y_2(t)$ och låta pumparnas tillflöde styras enligt

$$\begin{aligned}u_1(t) &= K_1[r(t) - y_1(t)] + K_2 \int_0^t [r(\tau) - y_1(\tau)]\, d\tau, \quad K_1 > 0,\, K_2 > 0 \\ u_2(t) &= K_3[r(t) - y_1(t)] + K_4 \int_0^t [r(\tau) - y_1(\tau)]\, d\tau, \quad K_3 > 0,\, K_4 > 0.\end{aligned}$$

Ställ upp en tillståndsmodell för det återkopplade systemet med den nya föreslagna styrlagen och studera dess styrbarhet.

Är denna reglering att föredra framför den i deluppgift (a)?

(2p)