KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2015-04-07

DEL A

1. Låt $f(x) = \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2}$.
   A. Bestäm definitionsmängden till funktionen f.
   B. Bestäm funktionens största och minsta värde.

(Om du har glömt bort derivatan av arcsin x så kan du härleda den genom implicit derivering av sambandet $\sin(\arcsin x) = x$*. Om du minns den behöver du inte härleda den.)*

Lösning. A. Definitionsmängden är den största möjliga mängd av reella tal x för vilka $f(x)$ är definierat och reellt. Eftersom både $\arcsin x$ och rotuttrycket är definierat för x i intervallet $-1 \leq x \leq 1$ och inga andra, så är det definitionsmängden för f. Dvs definitionsmängden består av de reella tal x som uppfyller att $-1 \leq x \leq 1$.

B. Eftersom f är kontinuerlig på hela det slutna och begränsade intervallet $-1 \leq x \leq 1$ måste f anta både ett största och ett minsta värde och dessa måste antas i punkter som är kritiska punkter (där derivatan är noll) eller singulära punkter (där derivata saknas) eller ändpunkter till intervallet. Ändpunkterna är ± 1. Vi deriverar och får

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2 \cdot (-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}},$$

som existerar för alla x sådana att $-1 < x < 1$. Vi ser att $f'(x) = 0 \iff x = 1/2$. Detta är alltså den enda kritiska punkten. Singulära punkter i det inre av intervallet saknas.

Det följer av ovanstående att största och minsta värdet måste antas i några av punkterna -1, 1 och $1/2$. Eftersom

$$f(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad f(1) = \frac{\pi}{2} \quad \text{och} \quad f(1/2) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}.$$

så ser vi att största värdet är $f(1/2) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$ och minsta värdet är $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

□

Svar: A. Definitionsmängden består av alla reella tal x som uppfyller att $-1 \leq x \leq 1$.
B. Största värdet är $f(1/2) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$ och minsta värdet är $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

2. Avgör om det är sant att $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\,dx < 2.$

Lösning. Denna uppgift kan lösas på många olika sätt. Här är tre olika möjliga lösningar:

1. Eftersom $e^{-|x|} \leq 1$ med likhet bara då $x = 0$ så är $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\,dx < \int_{-1}^{1} 1 \cdot dx = 2.$

2. Vi har att $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\,dx = \int_{-1}^{0} e^{x}\,dx + \int_{0}^{1} e^{-x}\,dx = [e^x]_{-1}^{0} + [-e^{-x}]_{0}^{1} = 2 - \frac{2}{e} < 2.$

3. Eftersom integrationsintervallet är symmetriskt runt origo och $e^{-|x|}$ är en jämn funktion (dvs $e^{-|-x|} = e^{-|x|}$) så gäller att

$$\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\,dx = 2\int_{0}^{1} e^{-|x|}\,dx = 2\int_{0}^{1} e^{-x}\,dx = 2 - \frac{2}{e} < 2$$

$\square$

Svar: Det är sant att $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-|x|}\,dx < 2.$

3. Odämpad svängning beskrivs av differentialekvationen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

där $y(t)$ är avvikelsen från jämviktsläget vid tidpunkten t och ω är en konstant.
   A. Lös differentialekvationen om $\omega = 4$.
   B. Finn den lösning till differentialekvationen (fortfarande med $\omega = 4$) som också uppfyller att $y(0) = -6$ och $y'(0) = 32$.
   C. Bestäm perioden och amplituden hos din lösning.

Lösning. A. När $\omega = 4$ får vi diffekvationen $y'' + 16y = 0$. Den karaktäristiska ekvationen $r^2 + 16 = 0$ har lösning $r = 4i$ så diffekvationens lösning är

$$y(t) = a\cos 4t + b\sin 4t, \quad \text{för godtyckliga konstanter } a, b.$$

B. Vi väljer konstanterna så att villkoren uppfylls. Vi ser att $y(0) = -6$ ger att $a = -6$ och $y'(0) = 32$ ger att $4b = 32$ dvs $b = 8$. Så den lösning till diffekvationen som uppfyller villkoren är alltså

$$y(t) = -6\cos 4t + 8\sin 4t.$$

C. Eftersom $\sin t$ och $\cos t$ är periodiska med perioden 2π så är $y(t) = -6\cos 4t + 8\sin 4t$ periodisk med perioden $\pi/2$. Amplituden är maxvärdet av $|-6\cos 4t + 8\sin 4t|$ dvs 10. $\square$

Svar: A. $y(t) = a\cos 4t + b\sin 4t$, där a och b är godtyckliga konstanter.
B. $y(t) = -6\cos 4t + 8\sin 4t$.
C. Period $\pi/2$ Amplitud 10

DEL B

4. A. Beräkna arean av det område som ligger mellan kurvorna $y = 1$ och $y = \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3}$, för x i intervallet $0 \leq x \leq R$.

B. Avgör om det område som ligger mellan kurvorna $y = 1$ och $y = \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3}$, för x i intervallet $0 \leq x < \infty$, har ändlig area. Beräkna i så fall denna area.

Lösning. A. Arean ges av

$$\int_0^R \left(\frac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3} - 1 \right) dx = \int_0^R \frac{1}{x^2+4x+3}\, dx.$$

I den sista integralen använder vi partialbråksuppdelning. Eftersom nämnarens nollställen är -1 och -3 kan vi skriva om integranden som $A/(x+1) + B/(x+3)$ där vi ser att vi ska välja $A = 1/2$ och $B = -1/2$. Vi får alltså att den sökta arean är

$$\begin{aligned}
\int_0^R \frac{1}{x^2+4x+3}\, dx &= \int_0^R \left(\frac{1/2}{x+1} - \frac{1/2}{x+3} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\ln|x+1| - \ln|x+3| \right]_0^R \\
&= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{R+1}{R+3} + \ln 3 \right).
\end{aligned}$$

B. A. Arean ges av

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \int_0^R \left(\frac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3} - 1 \right) dx &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{1}{x^2+4x+3}\, dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \left(\ln \frac{R+1}{R+3} + \ln 3 \right) \\
&= \frac{\ln 3}{2}.
\end{aligned}$$

Arean är alltså ändlig med värdet $\dfrac{\ln 3}{2}$.

$\square$

Svar: A. $\frac{1}{2}\left(\ln \frac{R+1}{R+3} + \ln 3\right)$. B. $\frac{\ln 3}{2}$.

5. Låt $f(x) = 1-(x-1)^2$, $0 \leq x \leq 2$. Gör en enkel skiss av funktionsgrafen $y = f(x)$ och finn den punkt (x_0, y_0) på funktionsgrafen som gör arean av triangeln med hörn i $(0,0)$, $(x_0, 0)$ och (x_0, y_0) maximal.

Lösning. Grafen är en andragradskurvan och vi ser direkt att högsta punkten på kurvan är punkten $(1,1)$ eftersom största värdet av f är $f(1) = 1$. Kurvan skär x-axeln i $x = 0$ och $x = 2$.

Triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(x,0)$ och (x,y) har area $\dfrac{xy}{2}$ vilket kan skrivas $\dfrac{x(1-(x-1)^2)}{2}$ eftersom (x,y) ska vara en punkt på grafen. Vi ska alltså maximera funktionen

$$A(x) = \frac{x(1-(x-1)^2)}{2}, \quad \text{då} \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Funktionen A är kontinuerlig på hela det slutna och begränsade intervallet, varför ett max säkert finns. Detta kan antas i ändpunkterna eller i en kritisk punkt i det inre av intervallet (singulära punkter finns inte då A är ett polynom). Vi dervierar och får

$$A'(x) = \frac{1-(1-x)^2 + 2x(1-x)}{2} = \frac{4x - 3x^2}{2}.$$

Vi ser att $A'(x) = 0 \iff x = 0$ eller $x = 4/3$. Vi har alltså tre möjliga punkter, dvs $x = 0$, $x = 4/3$ och $x = 2$, där maximum kan antas. Vi vet att max antas i någon av dem. Eftersom

$$A(0) = 0, \quad A(4/3) = \frac{16}{27} \quad \text{och} \quad A(2) = 0,$$

så är maximala arean $16/27$, som inträffar när $x = 4/3$ och $y = 8/9$ Den punkt på funktionsgrafen som söks i uppgiften är alltså punkten $(4/3, 8/9)$.

$\square$

Svar: $(4/3, 8/9)$.

6. Beräkna, t ex med hjälp av variabelsubstitution eller partiell integration, integralen

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$$

Lösning. Integralen går att beräkna på flera olika sätt. T ex dessa två:

1. Med partiell integration får vi

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx &= \left[\frac{-x(1-x)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-(1-x)^{3/2}}{3/2}\,dx\\ &= \left[\frac{-(1-x)^{5/2}}{(3/2)(5/2)}\right]_0^1\\ &= \frac{4}{15}.\end{aligned}$$

2. Med variabelsubstitutionen $\sqrt{1-x} = u$ får vi (obs att $x = 1-u^2$ och $dx = -2udu$ med nya gränser 1 och 0):

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx &= \int_1^0 (1-u^2)u(-2u)\,du\\ &= \int_0^1 2u^2(1-u^2)\,du = \cdots = \frac{4}{15}\end{aligned}$$

$\square$

Svar: $4/15$

DEL C

7. A. Formulera differentialkalkylens medelvärdessats.
B. Använd den för att visa att en funktion vars derivata är noll i ett öppet intervall måste vara konstant i intervallet.

Lösning. Se läroboken sats 11 och sats 13 i kapitel 2.8.

A. Om f är en funktion som är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$ och deriverbar på det öppna intervallet (a, b) så finns en punkt c mellan a och b sådan att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

B. Anta att funktionen f har en derivata som existerar och är noll för alla punkter i ett visst öppet intervall. Ta en punkt i intervallet och kalla den a. Ta sedan en annan punkt, vilken som helst, i intervallet, kalla den b. Eftersom dessa punkter ligger i ett intervall där f är deriverbar, är förutsättningarna för medelvärdessatsen uppfyllda och det följer att det finns en punkt c mellan a och b sådan att

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Men c ligger i det intervall vi började med där enligt antagande derivatan är noll överallt, så $f'(c) = 0$. Det måste alltså gälla att $f(b) - f(a) = 0$ eller med andra ord att $f(b) = f(a)$. Eftersom b var godtyckligt vald vet vi nu att funktionsvärdet i vilken punkt som helst i intervallet är lika med funktionsvärdet i punkten a. Dvs funktionen är konstant och har värdet $f(a)$ i alla punkter i intervallet. $\square$

Svar:

8. Låt f vara en tre gånger deriverbar funktion på intervallet $-1 < x < 2$, sådan att $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = 6$ och $|f'''(x)| \leq 1$ för alla x i intervallet. Visa att
$$1 - \frac{1}{24} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq 1 + \frac{1}{24}.$$

Lösning. Med hjälp av Taylors formel och det vi vet om f har vi att för x mellan -1 och 2 är

$$f(x) = 3x^2 + E(x), \quad \text{där } |E(x)| \leq \frac{x^3}{6}.$$

Det följer av detta att

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (3x^2 + E(x))\,dx = 1 + \int_0^1 E(x)\,dx.$$

Eftersom

$$\left|\int_0^1 E(x)\,dx\right| \leq \int_0^1 |E(x)|\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^3}{6}\,dx = \frac{1}{24},$$

så måste det gälla att

$$1 - \frac{1}{24} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq 1 + \frac{1}{24}.$$

□

Svar:

9. Avgör om det finns någon lösning $y(t)$ till differentialekvationen

$$y''(t) + y(t) = e^t$$

sådan att kvoten $y(t)/t^2$ är begränsad när $t \to 0$. Bestäm en sådan lösning, om en sådan lösning finns. Kan det finnas flera?

Lösning. Lösningen till differentialekvationen fås som $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ där y_h är den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation och y_p är någon partikulärlösning.

Vi börjar med att hitta y_h. Karaktäristiska ekvationen $r^2 + 1 = 0$ har lösning $r = \pm i$ varför $y_h(t) = a\cos t + b\sin t$.

Vi fortsätter med att hitta y_p. Vi ansätter $y_p(t) = ce^t$ för någon konstant c. Då är $y_p''(t) + y_p(t) = e^t$ om och endast om vi väljer $c = 1/2$. Vi har alltså $y_p(t) = \frac{1}{2}e^t$.

Sammantaget har alltså differentialekvationen i uppgiften lösningen $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ eller med andra ord

$$y(t) = a\cos t + b\sin t + \frac{1}{2}e^t, \quad a, b \text{ godtyckliga konstanter.}$$

Nu ska vi undersöka kvoten $y(t)/t^2$ när t ligger nära 0. Med hjälp av Taylorutveckling kring origo får vi att

$$y(t) = a(1 - \frac{t^2}{2}) + bt + \frac{1}{2}(1 + t + \frac{t^2}{2}) + R(t)t^3$$

där $R(t)$ är någon funktion som är begränsad i en omgivning av origo.

Med hjälp av denna Taylorutveckling ser vi att

$$\lim_{t\to 0}\frac{y(t)}{t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{a - \frac{at^2}{2} + bt + \frac{1}{2} + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + R(t)}{t^2}$$

och det är klart att detta gränsvärde bara kan existera ändligt om $a = b = -1/2$. För alla andra val av a och b blir gränsvärdet $\pm\infty$. Den enda lösning y till diffekvationen som har en chans att göra kvoten $y(t)/t^2$ begränsad i en omgivning av origo är alltså

$$y(t) = -\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}e^t.$$

För denna lösning gäller i en omgivning av origo att

$$\frac{y(t)}{t^2} = \frac{\frac{t^2}{2} + R(t)t^3}{t^2} = \frac{1}{2} + R(t)t$$

där $R(t)$ är begränsad i en omgivning av origo.

Slutsatsen är alltså att det finns exakt en lösning $y(t)$ till diffekvationen $y''(t)+y(t) = e^t$ som är begränsad i en omgivning av origo och den lösningen är

$$y(t) = -\frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}e^t.$$

$\square$

Svar: Se lösningen.
