Lösningsförslag till tentamen, SF1629, Differentialekvationer och Transformer II (del 2) 8 april 2015 kl 14:00 - 19:00.

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonus från kontrollskrivningen gäller uppgift (1).

Preliminära betygsgränser: 14 poäng ger garanterat betyg E, 17 poäng ger garanterat betyg D, 21 poäng ger garanterat betyg C, 24 poäng ger garanterat betyg B och 28 poäng ger garanterat betyg A. Den som har 13 poäng får betyg Fx och har möjlighet att komplettera. Kontakta i så fall examinatorn.

Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen *Mathematics Handbook* av Råde och Westergren.

OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och väl motiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

(1) Låt $\varphi(x) = ax + bx^2$. Bestäm konstanterna a, b så att integralen

$$\int_0^1 |1 - \varphi(x)|^2 dx$$

blir så liten som möjligt.

Lösning: Vi inför skalärprodrukten

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)} dx$$

på rummet $C([0,1])$. Från teorin vet vi att integralen i problemet minimeras då $\varphi(x)$ är den ortogonala projektionen av $u(x) = 1$ på delrummet V som spänns upp av $\psi_1(x) = x$ och $\psi_2(x) = x^2$.

För att beräkna projektionen behöver vi en ortogonal bas för V. Vi väljer $\varphi_1(x) = \psi_1(x) = x$, och använder Gram-Schmidt för att få en vektor φ_2 i V, ortogonal mot φ_1:

$$\varphi_2(x) = \psi_2(x) - \frac{< \psi_2, \varphi_1 >}{\|\varphi_1\|^2}\varphi_1(x).$$

Eftersom

$$< \psi_2, \varphi_1 >= \int_0^1 x^2 \cdot x dx = \frac{1}{4}, \quad \|\varphi_1\|^2 =< \varphi_1, \varphi_1 >= \int_0^1 x \cdot x dx = \frac{1}{3}.$$

får vi

$$\varphi_2(x) = x^2 - \frac{3x}{4}.$$

Projektionen $P(u)$ av $u(x) = 1$ på V ges av

$$P(u) = \frac{< u, \varphi_1 >}{\|\varphi_1\|^2}\varphi_1 + \frac{< u, \varphi_2 >}{\|\varphi_2\|^2}\varphi_2.$$

Vi har

$$< u, \varphi_1 >= \frac{1}{2}, \; < u, \varphi_2 >= -\frac{1}{24}, \; \|\varphi_2\|^2 = \frac{1}{80}.$$

så
$$P(u) = \frac{3}{2}\varphi_1(x) - \frac{80}{24}\varphi_2(x) = \frac{3}{2}x - \frac{10}{3}(x^2 - \frac{3x}{4}) = 4x - \frac{10}{3}x^2.$$
Alltså, det är detta φ som minimerar intregralen, dvs, vi ska välja $a = 4$ och $b = -\frac{10}{3}$.

(2) a) Låt $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$. Bestäm $f'(x)$ i distributionsmening. Förenkla ditt svar så långt som möjligt. **(2p)**

b) Funktionen
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$
definierar en distribution $T \in \mathcal{S}'$ (på det "vanliga" sättet). Använd definitionen av (distributions)derivata för att beräkna T'. **(2p)**

Lösning: a) Vi kan skriva
$$f(x) = (x-1)(1 - H(x-1)) + x^2 H(x-1).$$
Deriviering ger
$$f'(x) = 1(1 - H(x-1)) + (x-1)(-\delta(x-1)) + 2xH(x-1) + x^2\delta(x-1) = \\ = (1 - H(x-1)) + 2xH(x-1) + \delta(x-1)$$
eftersom $(x-1)\delta(x-1) = 0$ och $x^2\delta(x-1) = \delta(x-1)$ (se exempel 8.19 i Vretblad).

b) Distibutionen T är definierad genom
$$T[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx.$$
Enligt definition har vi
$$T'[\varphi] = -T[\varphi'] = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_1^2 \varphi'(x)dx - \int_3^{\infty} \varphi'(x)dx =$$
$$= -[\varphi(x)]_1^2 - [\varphi(x)]_3^{\infty} = -(\varphi(2) - \varphi(1)) - (0 - \varphi(3)) = \varphi(1) - \varphi(2) + \varphi(3).$$
I sista steget utnyttjade vi att testfunktionen φ tillhör Schwartzklassen (se Definition 8.1 i Vretblad), så speciellt gäller att $\varphi(x) \to 0$ då $x \to \infty$.

(3) Bestäm ett fullständigt (complete) ortogonalt system i $L^2(0, \pi)$ bestående av lösningar till randvärdesproblemet

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad u(0) = 0, \; u'(\pi) = 0.$$

Motivera ditt svar ordentligt.

Lösning: Detta är ett Sturm-Liouville-problem (med $w(t) = 1$). Enligt Sturm-Liouvilles sats har randvärdesproblemet (icke-triviala) lösningar för (uppräkneligt) oändlig många värden på λ, $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$; till varje av dessa värden λ_n finns det en (icke-trivial) lösning φ_n. Mängden $\{\varphi_n\}$ utgör ett fullständigt ortogonalt system i $L^2(0, \pi)$.

Vi behöver följdaktligen hitta alla egenvärden, och motsvarande egenfunktioner, till randvärdesproblemet. Då kommer dessa egenfunktioner bilda ett fullständigt ortogonalt system i $L^2(0, \pi)$.

Undersöker man $\lambda \leq 0$ upptäcker man att det saknas icke-triviala lösningar (visa detta!). Vi antar att $\lambda > 0$ och låter $\omega = \sqrt{\lambda}$. Ekvationen

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0$$

har den allmänna lösningen $u(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)$. Vi har $u'(x) = -c_1 \omega \sin(\omega x) + c_2 \omega \cos(\omega x)$.

Randvillkoret $u(0) = 0$ ger $0 = u(0) = c_1$, dvs $c_1 = 0$. Vi har alltså $u(x) = c_2 \sin(\omega x$ och $u'(x) = c_2 \omega \cos(\omega x)$. Randvillkoret $u'(\pi) = 0$ ger

$$0 = u'(\pi) = c_2 \omega \cos(\omega \pi).$$

Enda möjligheten nu för att vi ska få icke-triviala lösningar är att $\cos(\omega\pi) = 0$. Detta är uppfyllt precis då $\omega = 1/2 + n$ där $n \geq 0$ (eftersom $\omega > 0$) är ett heltal. Således, vi har lösningarna

$$\varphi_n(x) = \sin((1/2 + n)x)$$

för $\lambda_n = (1/2 + n)^2$, $n \geq 0$. Alltså, $\{\sin((1/2 + n)x)\}_{n=0}^{\infty}$ bildar ett fullständigt ortogonalt system i $L^2(0, \pi)$.

(4) En funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ kallas bandbegränsad om dess Fouriertransform är 0 utanför något ändligt intervall. Visa att om $\widehat{f}(\omega) = 0$ då $|\omega| > W$ så gäller

$$f(t) * \frac{\sin \Omega t}{\pi t} = f(t)$$

för alla $\Omega > W$. (Vi antar att f är kontinuerligt deriverbar.)

Lösning: Fouriertransformerar vi bägge leden fås

$$\widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega)$$

där $\widehat{g}(\omega) = 1$ om $|\omega| < \Omega$ och $\widehat{g}(\omega) = 0$ om $|\omega| > \Omega$. Eftersom vi antagit att $\widehat{f}(\omega) = 0$ för alla $|\omega| > W$, och $\Omega > W$, så reduceras VL ovan till $\widehat{f}(\omega)$. Alltså, de två funktionerna $f(t) * \frac{\sin \Omega t}{\pi t}$ och $f(t)$ har samma Fouriertransform. Således följer det från inversformeln (vi har antagit att f är reguljär) att de två funktionerna måste vara lika.

(5) Lös problemet

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0; \\ u(0,t) &= 0,\ u(\pi,t) = 1, \quad t > 0; \\ u(x,0) &= 0, \quad 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Lösning: Eftersom randvillkoren inte är homgena söker vi en lösning på formen

$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$. Insättning i differentialekvationen ger $v_{xx}(x,t) + \varphi''(x) = v_{tt}(x,t)$. Vi vill att $\varphi''(x) = 0$, och att $\varphi(0) = 0, \varphi(\pi) = 1$. Detta är uppfyllt för $\varphi(x) = x/\pi$.

Vi vill nu bestämma $v(x,t)$ så att $u(x,t)$ blir en lösning till det ursprungliga problemet. Notera att valet av $\varphi(x)$ ger följande villkor på v:

$$v_{xx} = v_t,$$

$$v(0,t) = u(0,t) - \varphi(0) = 0, v(\pi,t) = u(\pi,t) - \varphi(\pi) = 1 - 1 = 0$$

samt

$$v(0,x) = u(x,t) - \varphi(x) = -x/\pi.$$

Vi har således fått ett homogent problem:

$$\begin{aligned} v_{xx} &= v_t, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0; \\ v(0,t) &= 0,\ v(\pi,t) = 0, \quad t > 0; \\ v(x,0) &= -x/\pi, \quad 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Detta problem löses som i avsnitt 1.4 och 6.1 i Vretblad (gör detta!). Lösningen är

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin nx$$

där b_n ges av (vi vill att $v(x,0) = -x/\pi$, så vi utvecklar i en sinusserie)

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (-x/\pi) \sin nx dx = \frac{2(-1)^n}{\pi n}.$$

Således,

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 t} \sin nx + \frac{x}{\pi}.$$

(6) Antag att $f \in L^1(\mathbb{R})$ och låt

$$g(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} f(\tau)d\tau,$$

där $T > 0$ är en given konstant. Visa att $|\widehat{g}(\omega)| \leq |\widehat{f}(\omega)|$ och att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

(Tips: tänk på faltning.)

Lösning: Vi tolkar uttrycket för $g(t)$ som en faltning. Låt

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 < t < T \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Då kan vi skriva

$$g(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)f(\tau)d\tau = h * f(t)$$

Fouriertransformerar vi detta fås

$$\widehat{g}(\omega) = \widehat{h}(\omega)\widehat{f}(\omega).$$

Vi noterar att, enligt definition, $\widehat{h}(\omega) = \int_0^T (1/T)e^{-i\omega t}dt$, så

$$|\widehat{h}(\omega)| = \left|\int_0^T \frac{1}{T}e^{-i\omega t}dt\right| \leq \int_0^T |\frac{1}{T}e^{-i\omega t}|dt = 1,$$

eftersom $|e^{ik}| = 1$ för alla reella k. Således har vi

$$|\widehat{g}(\omega)| = |\widehat{h}(\omega)\widehat{f}(\omega)| \leq |\widehat{f}(\omega)|.$$

Vi använder nu Plancherels formel (i likheterna nedan), samt olikheten ovan, för att få

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(\omega)|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

(7) Låt

$$h(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

och definiera

$$h_t(x) = th(tx), \quad t > 0.$$

Undersök vilka av följande gränsvärden som existerar, och beräkna dem i förkommande fall:

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-1}^{1} h_t(x)e^{x^2}dx;$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-1}^{1} h_t(x)\sin\left(\sqrt{|x|}+\frac{1}{t}\right)dx.$$

Motivera alla steg i analysen noga.

Lösning: Vi noterar att $h_t(x) \geq 0$ för alla x och alla $t > 0$. Vi ser också att $h_t(x) = th(tx) = 0$ för $|x| \leq 1/t$, så för varje $\delta > 0$ gäller

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\delta<|x|\leq 1} h_t(x)dx = 0.$$

Vidare,

$$\int_{-1}^{1} h_t(x)dx = \int_{-1/t}^{1/t} h_t(x)dx = \int_{-1/t}^{1/t} th(tx)dx = \int_{-1}^{1} h(y)dy = \int_{-1}^{1}(1-y^2)dy = 4/3.$$

Således, om vi låter $g_t(x) = 3h_t(x)/4$ så är $g_t(x)$ en positiv summationskärna. Det första gränsvärdet ges därför av

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-1}^{1} h_t(x)e^{x^2}dx = (4/3)\lim_{t\to\infty}\int_{-1}^{1} g_t(x)e^{x^2}dx = (4/3)e^0 = 4/3$$

enligt sats 2.1 i Vretblad (satsen fungerar lika bra för en kontinuerlig parameter t som för en diskret parameter n, vilket man ser från beviset; vill man använda sats 2.1 precis som den är formulerad kan också göra analysen ovan för varje sekvens $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ som går mot oändligheten, och dera slutsatsen att gränsvärdet existerar (oavsett val av sekvens får man samma gränsvärde)).

För att beräkna det andra kan vi inte använda satsen. Vi vill visa att gränsvärdet är 0.

För varje $\varepsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ och $T > 0$ sådana att

$$\left|\sin\left(\sqrt{|x|}+\frac{1}{t}\right)\right| < \varepsilon$$

för alla $|x| < \delta$ och $t > T$. Vidare vet vi att det finns ett $T_1 > 0$ sådant att $h_t(x) = 0$ för alla $|x| < \delta$ om $t > T_1$. Följdaktligen har vi (tänk på att $h_t(x)$ är positiv)

$$\left|\int_{-1}^{1} h_t(x)\sin\left(\sqrt{|x|}+\frac{1}{t}\right)dx\right| = \left|\int_{-\delta}^{\delta} h_t(x)\sin\left(\sqrt{|x|}+\frac{1}{t}\right)dx\right| \leq$$

$$\leq \int_{-\delta}^{\delta} h_t(x)\left|\sin\left(\sqrt{|x|}+\frac{1}{t}\right)\right|dx \leq \varepsilon\int_{-\delta}^{\delta} h_t(x)dx \leq \varepsilon\cdot 1$$

för alla tillräckligt stora T.

(8) Låt $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara en ON-mängd i ett inre produktrum V.
a) Låt u vara en vektor i V och låt $c_1 = \langle u, \varphi_1 \rangle$. Visa att **(1p)**

$$\|u - c_1\varphi_1\|^2 = \|u\|^2 - |c_1|^2.$$

b) Resultatet i a) är ett specialfall av följande sats (som ej behöver bevisas): om $u \in V$, $c_k = \langle u, \varphi_k \rangle$ och Φ är en linjärkombination $\Phi = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k$ så gäller

(1) $$\|u - \Phi\|^2 = \|u\|^2 + \sum_{k=1}^{N} |a_k - c_k|^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2.$$

Använd detta resultat för att visa att ON-mängden $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ är fullständig om och endast om **(3p)**

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle u, \varphi_k \rangle|^2 \quad \text{för alla } u \in V.$$

Lösning: a) Enligt definiton, och räknelagar för skalärprodukten, har vi

$$\begin{aligned}\|u - c_1\varphi_1\|^2 &= < u - c_1\varphi_1, u - c_1\varphi_1 >= \\ =< u, u > - < u, c_1\varphi_1 > &- < c_1\varphi_1, u > + < c_1\varphi_1, c_1\varphi_1 >= \\ = \|u\|^2 - \overline{c_1} < u, \varphi_1 > &- c_1 < \varphi_1, u > + |c_1|^2\|\varphi_1\|^2 = \\ = \|u\|^2 - \overline{c_1} < u, \varphi_1 > &- c_1\overline{< u, \varphi_1 >} + |c_1|^2.\end{aligned}$$

I sista steget utnyttjar vi att $\|\varphi_1\|^2 = 1$. Vidare, vi vet att $c_1 =< u, \varphi_1 >$. Således har vi

$$\begin{aligned}\|u\|^2 - \overline{c_1} < u, \varphi_1 > - c_1\overline{< u, \varphi_1 >} + |c_1|^2 = \\ = \|u\|^2 - \overline{c_1}c_1 - c_1\overline{c_1} + |c_1|^2 = \|u\|^2 - |c_1|^2 - |c_1|^2 + |c_1|^2 = \|u\|^2 - |c_1|^2.\end{aligned}$$

b) Att $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ är fullständig (i V) betyder att för varje vektor $u \in V$ och $\varepsilon > 0$ finns det en linjärkombination $\sum_{j=1}^{N} a_j \varphi_j$ sådan att

$$\left\| u - \sum_{j=1}^{N} a_j \varphi_j \right\| < \varepsilon.$$

Antag först att

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle u, \varphi_k \rangle|^2 \quad \text{för alla } u \in V.$$

Tag $u \in V$ och $\varepsilon > 0$. Enligt formel (1), samt antagandet, har vi

$$\left\| u - \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j \right\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k|^2 < \varepsilon^2$$

om vi väljer N tillräckligt stort, eftersom serien är konvergent. Således är $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ fullständig (i V).

Antag nu att $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ är fullständig (i V). Tag $u \in V$. Vi vill visa att

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2,$$

dvs att det för varje $\varepsilon > 0$ finns M sådant att

$$\left| \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 \right| < \varepsilon$$

för alla $N > M$. Tag $\varepsilon > 0$. Enligt Bessels olikhet (som följer direkt från (1)) har vi

$$\|u\|^2 \geq \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2,$$

så serien är konvergent. Vi behöver alltså visa att

$$\|u\|^2 - \sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 < \varepsilon$$

för alla $N > M$.

Eftersom termerna i serien är positiva så gäller

$$\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 \geq \sum_{j=1}^{M} |c_j|^2$$

om $N \geq M$. Alltså, om

$$\|u\|^2 - \sum_{j=1}^{M} |c_j|^2 < \varepsilon$$

för något M, så gäller detta för alla $N \geq M$. Vi behöver hitta ett sådant M.

Vi har antagit att $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ är fullständig (i V), så det finns en linjärkombination $\sum_{k=1}^{M} a_k\varphi_k$ sådan att

$$\left\| u - \sum_{j=1}^{M} a_j\varphi_j \right\| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Från formel (1) får vi:

$$\left\| u - \sum_{j=1}^{M} a_j\varphi_j \right\|^2 = \|u\|^2 + \sum_{k=1}^{M} |a_k - c_k|^2 - \sum_{k=1}^{M} |c_k|^2 \geq \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{M} |c_k|^2.$$

Således har vi

$$\|u\|^2 - \sum_{k=1}^{M} |c_k|^2 < \varepsilon,$$

vilket var det vi behöved visa.