KTH, Matematik, Maria Saprykina

SF1633 Differentialekvationer I
Lösningsförslag till kontrollskrivning nr 1, den 20 april 2015

1. (a) (2p) Bestäm de kritiska punkterna till ekvationen

$$\frac{dy}{dx} = 2 - y - y^2$$

samt avgör om de är asymptotiskt stabila, semi-stabila eller instabila. Rita fasporträttet (phase portrait).

Lösning: De kritiska punkterna är lösningar till $2 - y - y^2 = 0$; de är $y = 1$ och $y = -2$. Uttrycket $2 - y - y^2$ är positivt för $y \in (-2, 1)$ och negativt annars. Detta medför att lšningarna till ekvationen är växande för $y \in (-2, 1)$ och avtagande för alla de andra värden av y. Lösningarna som har begynnelevärden nära -2 avlägsnar sig från -2, och därför är den kritiska punkten $y = -2$ instabil. På samma sätt, är den kritiska punkten $y = 1$ stabil. Fasporträttet är följande:

$$< - - - \ (-2) \ - - - > \ (1) \ < - - -$$

(b) (1p) Låt $y(t)$ vara lösningen som uppfyller $y(3) = -1$. Bestäm $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

Lösning: Enligt undersökningen ovan, lösningarna som har begynnelsevärden i intervallet $(-2, 1)$ är växande och närmar sig värdet 1. Vi har $y(3) = -1$, och därför $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$.

2. (3p) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{1}{x}y' - \frac{2y}{x^2} = x\cos x, \quad y(1) = 0.$$

Lösning: Observera att ekvationen ej är definierad för $x = 0$, och begynnelsevärdet är givet i punkt $x = 1 > 0$. Först söker vi den allmänna lösningen i intervallet $x > 0$. Skriver om ekvationen på standardform:

$$y' - \frac{2y}{x} = x^2 \cos x.$$

Här är $\int P(x)dx = -\int \frac{2}{x}dx = -2\ln|x| = \ln x^{-2}$. En integrarande faktor är $e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$. Multiplicerar ekvationen med den integrerande faktorn:

$$\frac{d}{dx}(x^{-2}y) = \cos x \Leftrightarrow x^{-2}y = \sin x + C$$

Den allmänna lösningen i intervallet $x > 0$ är $y(x) = x^2 \sin x + Cx^2$.

Begynnelsevärdet ger: $0 = y(1) = \sin 1 + C \Leftrightarrow C = -\sin 1$. Lösningen till begynnelsevärdesproblemet ges av $y(x) = x^2(\sin x - \sin 1)$.

3. (3p) En stor tank innehåller 1000 liter rent vatten. En saltlösning med koncentrationen 0.1 kilogram per liter pumpas in med hastigheten 6 liter per minut. Samtidigt pumpas den välblandade lösningen ut med samma hastighet 6 liter per minut. Bestäm tidpunkten t då koncentrationen av salt i tanken blir 0.05 kilogram per liter.

Lösning: Låt $x(t)$ vara mängden salt i tanken vid tid t. Vid tid $t = 0$ fanns det inget salt i tanken, dvs $x(0) = 0$.

Saltet pumpas in i tanken med hastighet 0.6 kilogram per minut; koncentrationen av salt i tanken är $\frac{x(t)}{1000}$, och saltet kommer ut ur tanken med hastigheten $6\frac{x(t)}{1000} = \frac{3x}{500}$ kilogram per minut.

Vi får begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dx}{dt} = 0.6 - \frac{3t}{500}, \quad x(0) = 0.$$

Ekvationen är separabel. Den allmänna lösningen är $x(t) = 100 - Ce^{-3t/500}$.

Begynnelsevärdet ger $0 = x(0) = 100 - C \Leftrightarrow C = 100$. Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är alltså $x(t) = 100(1 - e^{-3t/500})$.

Koncentrationen av salt i tanken är $\frac{x(t)}{1000} = 0.1(1 - e^{-3t/500})$. När blir den 0.05 kilogram per liter?

$$0.1(1 - e^{-3t/500}) = 0.05 \Leftrightarrow e^{-3t/500} = 0.5 \Leftrightarrow t = \frac{500 \ln 2}{3}.$$