Om mätningar i allmännhet

Om gjorda mätningar inte stämmer med en teori man ställt upp kan det bero på flera saker

i. Teorin är fel och har bevisats vara fel genom mätningen
ii. Teorin behandlar ett renodlat specialfall och stämmer sämre och sämre i ena gränsen (eller bägge gränserna) av mätintervallet, därför att företeelser som teorin inte täcker spelar större och större roll t. ex. relativistiska effekter, brus, reflexer, störningar från andra källor...
iii. Det finns ett systematiskt fel i mätningen som gör att alla mätvärden blir för stora (eller för små). Denna typ av fel kan man antingen eliminera eller kompensera för.
iv. Det finns ett slumpmässigt fel som uppkommer pga avläsaren eller mätapparaturens bristande upplösning. Det är denna feltyp som kan behandlas med felanalys.
v. Mätfel som beror på avläsningsfel, slarv, bristande anteckningar. Denna feltyp vet alla hur man kan avhjälpa.

Förenklad felanalys

Antag att vi mäter tre storheter x,y,z för att beräkna storheten g=g(x,y,z) i punkten x=x0,y=y0,z=z0, och att de mätta storheterna är behäftande med fel av typen iv ovan av maximala storleken Δx, Δy, Δz.
Felet i g kan då (Ilinjär approximation) fås som summan av felbidragen:

$$(1)\quad \Delta g = \left|g'_x(x = x_0)\right|\Delta x + \left|g'_y(y = y_0)\right|\Delta y + \left|g'_z(z = z_0)\right|\Delta z$$

För den mattebitne kan man säga att detta egentligen bara är definitionen av differential. Eller hur?
Derivatorna ska alltså först beräknas algebraiskt ur sambandet g=g(x,y,z), varefter man sätter in x0, y0 och z0 och får ett numeriskt värde.
Ett mycket användbart speciallfall av detta är när mätstorheterna ingår enbart i första potens (i täljare eller nämnare) dvs t ex g=xy/z. Då blir

$$(2)\quad g'_x = \frac{y}{z} = \frac{g}{x} \quad g'_y = \frac{x}{z} = \frac{g}{y} \quad g'_z = \frac{xy}{z^2} = \frac{g}{z}$$

Det ska egentligen till ett stort antal beloppstecken för att vara på säkra sidan, men vi bortser från dessa eftersom vi vet att alla fel ändå räknas postitivt.
Nu sätter vi in (2) i (1) och får

$$(3)\quad \Delta g = \frac{g\Delta x}{x} + \frac{g\Delta y}{y} + \frac{g\Delta z}{z} \Rightarrow \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$$

Eller med ord: **Relativa felet i den beräknade storheten är lika med summan av de relativa felen i mätstorheterna**.
Men detta gäller bara om uttrycket är fritt från högre potenser eller andra funktioner (som cos, log mm).
...och det gäller bara i linjär approximetion dvs om felen är små dvs åtminstone relativa fel under 0,2, vilket även gäller summan. Har man större fel får man göra en worst case beräkning dvs välja de värden på x,y,z som ger störst g och de som ger minst g och beräkna felet med hjälp av detta. OBS att fel då kan kan bli olika stora

uppåt och neråt, exvis så är 2m (+2m eller -1m) ett resultat som anger 2m med en osäkerthet på en faktor 2 uppåt eller neråt.
Om någon storhet förekommer i högre potens exvis $g=x^3/z$ avspeglas denna som faktor framför dess relativa-felbidrag:

$$(4) \quad \frac{\Delta g}{g} = 3\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta z}{z}$$

Ett ganska märkligt exempel på hur det kan bli med exponentiella storheter fås ur sambandet mellan ljudintensitetsnivå β, som mäts i dB och ljudintensitet som mäts i W/m²:

$$(5) \quad \beta = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \Rightarrow I = I_0 10^{\beta/10} \Rightarrow I'_\beta = I_0\, 10^{\beta/10}\frac{\ln 10}{10} = I\frac{\ln 10}{10} \Rightarrow$$

$$(6) \quad \frac{\Delta I}{I} = I'_\beta\, \Delta\beta / I = \frac{\ln 10}{10}\Delta\beta \approx 0{,}23\Delta\beta$$

dvs relativa felet i Intensitet är proportionellt mot absoluta felet i ljudintensitetsnivå. Ett fel på 0,5dB ger alltså ett relativt fel på 0,12 i I.

Flera mätningar av samma punkt

Om 20 personer mäter temperaturen genom att läsa av var sin termometer, kommer de säkert inte att få samma resultat. Men att den bästa sammanfattningen av deras mätningsmöda är medelvärdet känns nog ganska naturligt, så det ska vi inte diskutera vidare, men hur ska man sammanfatta felet?
Det finns flera tänkbara metoder, av vilka medelvärdet av felen inte är bra. Du måste kunna svara på frågan ”Varför inte?” för att få fortsätta.
Vad blir nämligen alltid ett sådant medelvärde??
Medelvärdet av absolubeloppen av felen relativt medelvärdet skulle kunna vara en idé, men en mycket mer accepterad feluppskattning fås genom att kvadrera varje fel, ta medelvärdet av dessa fel och sedan dra roten ur detta medelvärde.
Ett också accepterat (och teoretiskt väl underbyggt) sätt att ta hänsyn till att säkerheten på medelvärdet ökar när en stor grupp mätningar görs är att dela med roten ur antalet mätningar, dvs om fem mätningar görs, vilka resulterar i felen
$\Delta 1, \Delta 2, \Delta 3, \Delta 4, \Delta 5$ blir totala felet

$$\Delta tot = \sqrt{\frac{(\Delta 1)^2 + (\Delta 2)^2 + (\Delta 3)^3 + (\Delta 4)^2 + (\Delta 5)^2}{5}} \Big/ \sqrt{5} = \frac{\sqrt{(\Delta 1)^2 + (\Delta 2)^2 + (\Delta 3)^2 + (\Delta 4)^2 + (\Delta 5)^2}}{5}$$

Obs att det skulle stått roten ur 5 i nämnaren om vi inte gjort ovanstående delning med roten ur 5 pga att felet minskar utan bara beräknat medelvärdet av kvadraterna.
Denna feluppskattning brukar kallas RMS-fel eller minstakvadrat-fel.
Om vi har fem mätningar varav fyra givit felet 0.1 och det femte felet 0 blir RMS=0.04, om två mätningar skulle givit 0,1 i fel och tre mätningar felet noll blir RMS=0,028.

Ge mig fem fria parametrar och jag kan anpassa vilka mätvärden som helst till en elefant
Fritt efter den amerikanske fysikern Feynmann