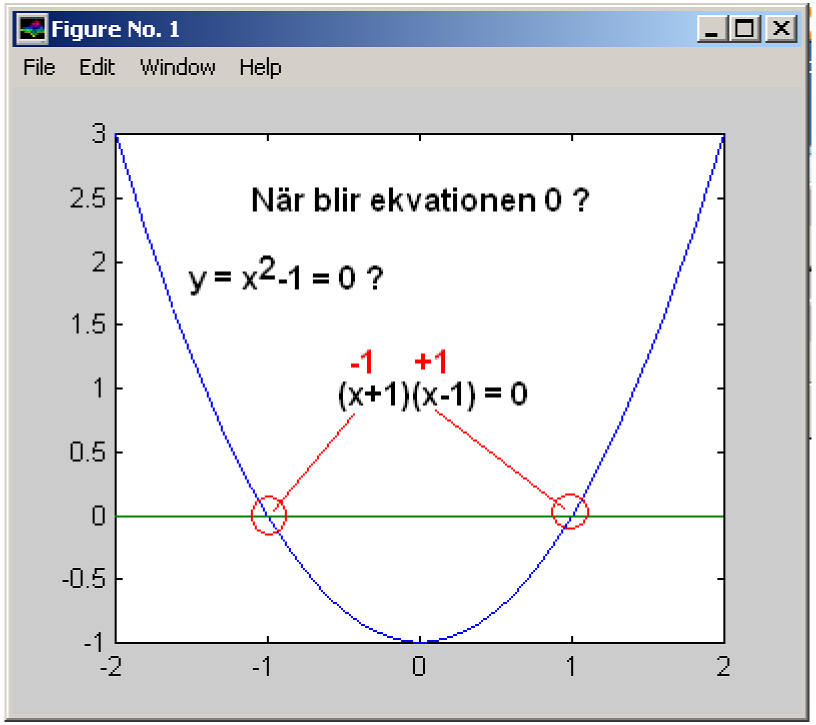
Complex numbers

William Sandqvist william@kth.se

Hur många lösningar har en andragradsekvation?

$$\boxed{y = x^2 - 1 = 0}$$



Två lösningar!

Kommer Du ihåg konjugatregeln?

$$y = (x+1)(x-1) = x^2 + \cancel{x} - \cancel{x} - 1^2 = x^2 - 1$$

$$y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x-1) = 0$$

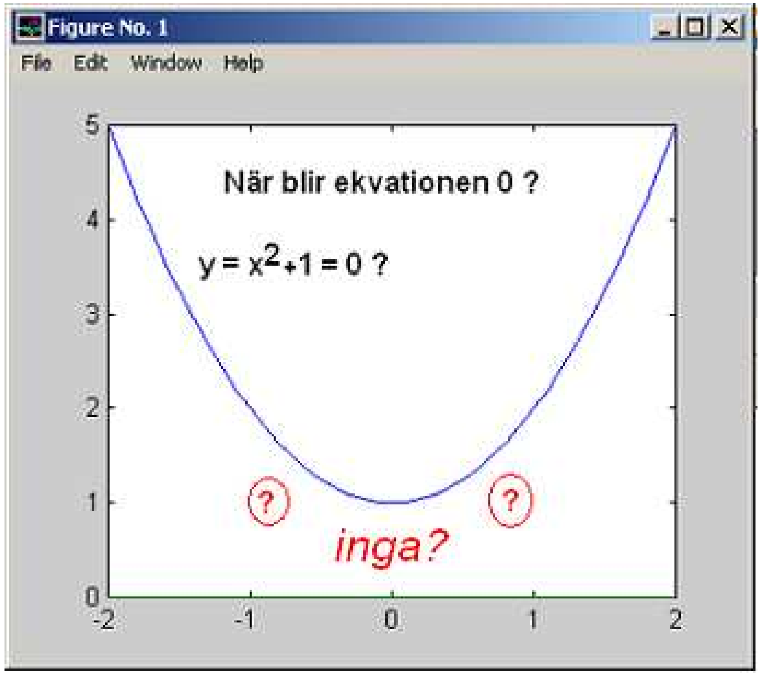
$$x_1 = -1 \quad x_2 = +1$$

Svaret kan ju lika gärna skrivas:

$$x_1 = -\sqrt{1} \quad x_2 = +\sqrt{1}$$

Hur många lösningar har den här?

$$y = x^2 + 1 = 0$$



Två lösningar!

Om det vore så att talet ”roten ur minus ett” funnes!

$$y=(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})=x^2+\cancel{\sqrt{-1}x}-\cancel{\sqrt{-1}x}-\underbrace{\sqrt{-1}^2}_{+1}=x^2+1$$

$$y=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})=0$$

$$x_1=-\sqrt{-1} \qquad x_2=+\sqrt{-1}$$

Imaginära tal

I matematiken **vill man** att det ska finnas lika många lösningar till en ekvation som ekvationens gradtal.

Det finns det om man inför ”roten ur minus ett” som ett tal.

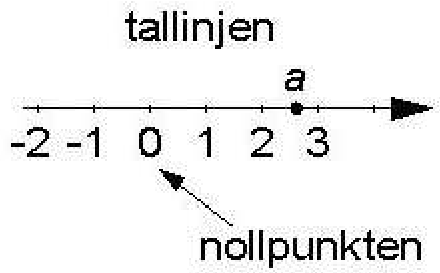
Detta tal brukar kallas för **i** (imaginära enheten) alternativt **j** eftersom den främsta användningen av imaginära tal finns inom elläran där bokstaven ”i” redan är upptaget för att beteckna strömmen.

Förutom vår vanliga dimension med **1** ($\sqrt{1}=1$) som enhet inför man en *extra dimension* med **j** ($\sqrt{-1}$) som enhet.

William Sandqvist william@kth.se

Tal-linjen

Vill Du passa på att ”repetera” Dina kunskaper om komplexa tal så varsågod och fortsätt att läsa här …



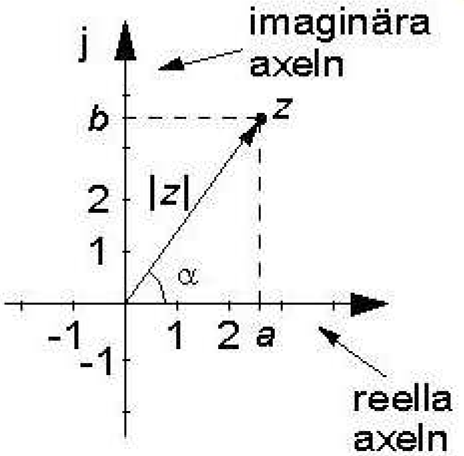
Ett vanligt, **reellt tal** *a* brukar man åskådliggöra som en punkt på den s.k. tallinjen. Talets **storlek** representeras av avståndet från punkten ifråga till tallinjens nollpunkt.

Komplexa talplanet

$$z = a \cdot \sqrt{1} + b \cdot \sqrt{-1} = a + \mathrm{j}b$$

Ett komplext tal *z* består av två komponenter. Det kan skrivas *a* + **j***b*. Här är ***a*** och ***b*** reella tal. **j** är ”$\sqrt{-1}$ ” och kallas den imaginära enheten.

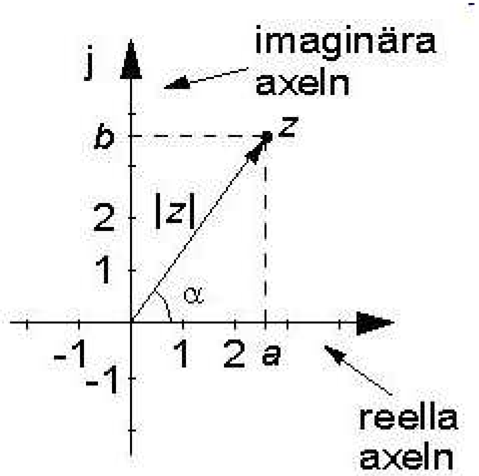
a är det komplexa talets **realdel**, Re(*z*).
b är dess **imaginärdel**, Im(*z*).



Varje komplext tal kan åskådliggöras som en punkt i ett *tvådimensionellt* koordinatsystem, **det komplexa talplanet**.

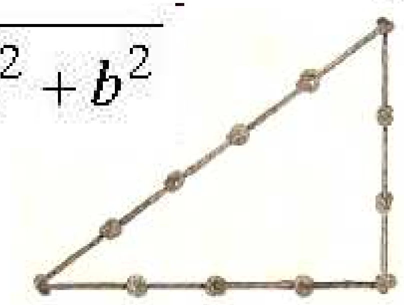
Belopp och Argument

Ett komplext tals ”koordinater” kan alternativt uttryckas *polärt*, som talets **belopp** |z|, avståndet från origo, och talets **argument** α, vinkeln mot den reella axeln.



Beloppet beräknar man med hjälp av **Pythagoras sats**.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Rät vinkel, rep med knutar, funnen i pyramid

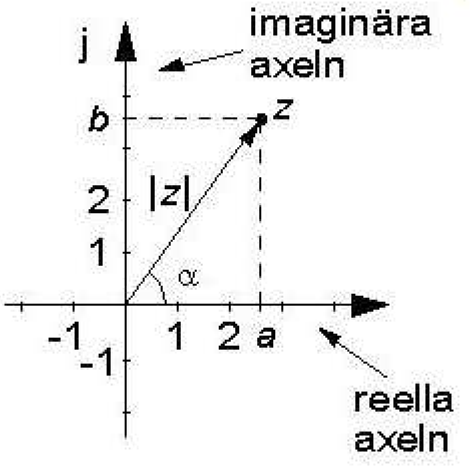
För att beräkna argumentet behöver man använda trigonometriska funktioner.

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$$

Belopp och Argument

$$a = |z|\cos(\alpha) \qquad b = |z|\sin(\alpha)$$

$$z = |z|\left(\cos(\alpha) + \mathrm{j}\cdot\sin(\alpha)\right)$$

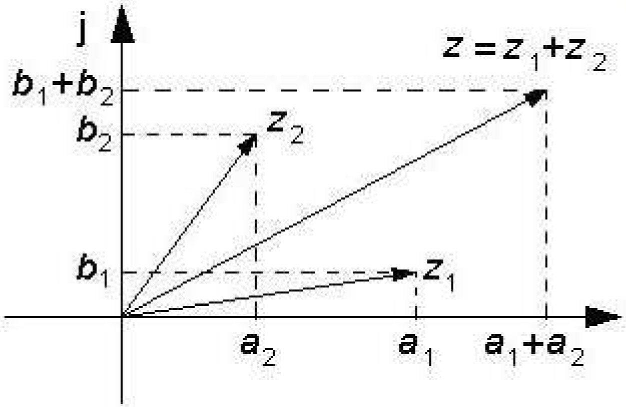


$$|z| = \sqrt{[\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2}$$

$$\arg(z) = \alpha = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) + n\cdot 2\pi \qquad a > 0$$

$$\arg(z) = \alpha = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) + \pi + n\cdot 2\pi \qquad a < 0$$

Addition av komplexa tal



$$z = z_1 + z_2 = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{j}\left(\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)\right)$$

$$z_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1 \qquad z_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$$

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + \mathrm{j}(b_1 + b_2) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}(z)$$

Figuren visar vad additionen innebär i det komplexa talplanet. Visaren för z blir lika med den geometriska summan av visarna för z_1 och z_2.

Subtraktion

$$z = z_1 - z_2 = \mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{j}\left(\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)\right)$$

I talplanet blir visaren för z lika med den geometriska skillnaden mellan visarna för z_1 och z_2.

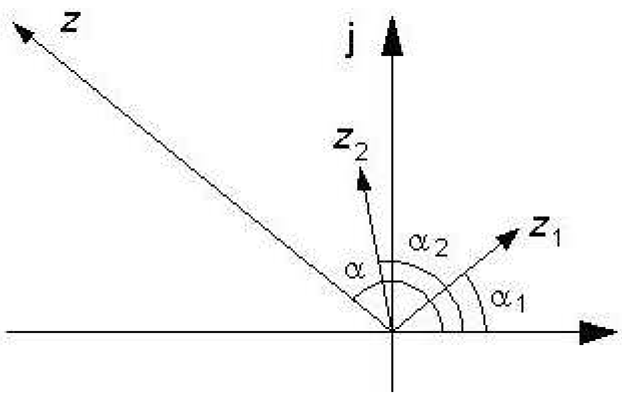
Multiplikation

Multiplikationsregeln demonstrerar vi enklast med ett exempel.

$$z_1 = \boxed{a_1} + \mathrm{j}\boxed{b_1} \qquad z_2 = \boxed{a_2} + \mathrm{j}\boxed{b_2} \qquad (\mathrm{j})^2 = -1$$

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + \mathrm{j}b_1)(a_2 + \mathrm{j}b_2) = (\boxed{a_1 a_2 - b_1 b_2}) + \mathrm{j}(\boxed{a_1 b_2 + a_2 b_1})$$

Multiplikation på polär form



Multiplicera beloppen och addera vinklarna!

$$
\begin{aligned}
z &= z_1 \cdot z_2 \\
&= |z_1|(\cos(\alpha_1) + \mathrm{j}\sin(\alpha_1)) \cdot |z_2|(\cos(\alpha_2) + \mathrm{j}\sin(\alpha_2)) \\
&= |z_1| \cdot |z_1|(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \mathrm{j}\sin(\alpha_1 + \alpha_2))
\end{aligned}
$$

Detta innebär att

$$|z| = |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \arg(z) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Division

$$z_1 = \boxed{a_1} + \mathrm{j}\boxed{b_1} \qquad z_2 = \boxed{a_2} + \mathrm{j}\boxed{b_2}$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + \mathrm{j}b_1}{a_2 + \mathrm{j}b_2}$$

Nu vill man ofta ha resultatet i formen a+jb och i så fall förlänger man med nämnarens ”konjugatkvantitet” a_2 - jb_2. Då får man

$$z = \frac{(a_1 + \mathrm{j}b_1)(a_2 - \mathrm{j}b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \boxed{\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}} + \mathrm{j}\boxed{\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}}$$

Division på polär form

Uttrycks talen i polär form kommer divisionsregeln att se ut så här:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \mathrm{j}\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\right)$$

$$|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

Dividera beloppen och subtrahera vinklarna!

Sammanfattning

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

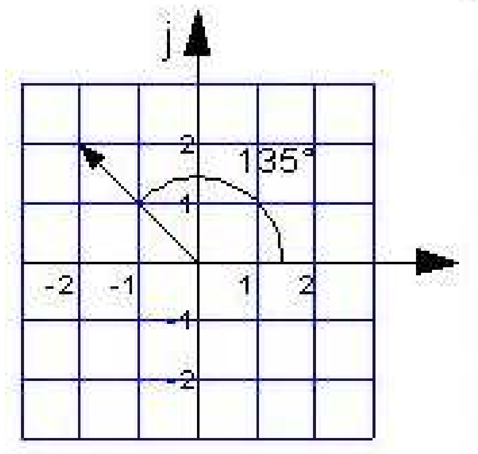
$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

Övningsuppgifter

Fråga

Åt vilket håll pekar visaren $z = -2 + j2$?



Övningsuppgifter

Fråga

Hur lång är visaren $z = 3 + j4$?

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Övningsuppgifter $z = z_1 \cdot z_2$

Fråga

$z_1 = j$ och $z_2 = -1 - j$

Bestäm $|z|$ och $\arg(z)$ för $z = z_1 \cdot z_2$? *Algebraiskt*:

$$z = z_1 \cdot z_2 = j \cdot (-1 - j) = -j - j^2 = 1 - j$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\arg(z) = \alpha = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = \arctan(-1) =$$

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$$

Övningsuppgifter $z = z_1 \cdot z_2$

Fråga

z_1 = j och z_2 = -1 – j

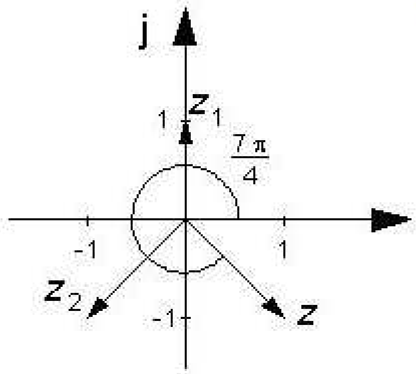
Bestäm |z| och arg(z) för $z = z_1 \cdot z_2$? *Polärt*:

$$|z_1| = 1 \qquad |z_2| = \sqrt{2}$$

$$z_1 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2}\right) \qquad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$z = z_1 \cdot z_2 = 1 \cdot \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4}\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

$$|z| = \sqrt{2} \qquad \arg(z) = \frac{7\pi}{4}$$



Multiplikation med* j *innebär tydligen vridning med 90° !

William Sandqvist william@kth.se

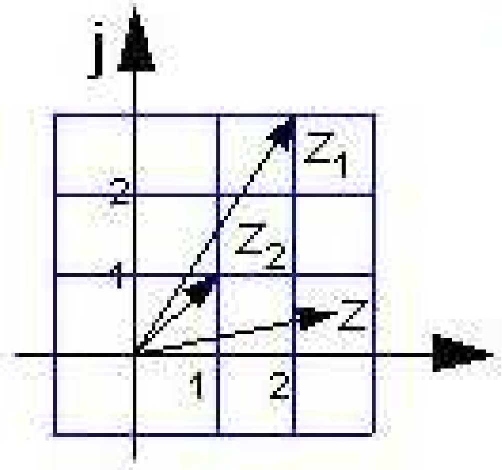
Övningsuppgifter

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

Fråga

$z_1 = 2 + 3j$ och $z_2 = 1 + j$

Bestäm $z = z_1/z_2$? *Algebraiskt*:



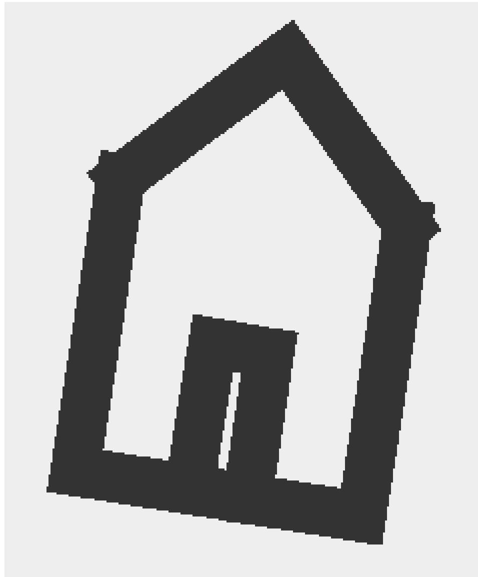
$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + j3}{1 + j} = \frac{(2 + j3)}{(1 + j)} \cdot \frac{(1 - j)}{(1 - j)} =$$

$$= \frac{2 + j - 3j^2}{1 + 1} = \frac{5 + j}{2} = 2{,}5 + 0{,}5\,j$$

Används komplexa tal?

Komplexa tal kan bland annat användas till **Cad** och **bildbehandling** och **spelprogram**.

En bild ritad av punkter i det komplexa talplanet ser ju likadan ut som en som är ritad i vårt vanliga två-dimensionella koordinatsystem.



Matematiken blir dock enklare. Inga komplicerade matematikfunktioner behövs. För att tex. ”vrida” och ”skala om” bilden, multiplicerar man bara alla punkterna ”komplext” med ett lämpligt tal!

Mandelbrotmängden

Se här en märklig bild komponerad med komplexa tal …

Mandelbrotmängden

iterera för varje punkt

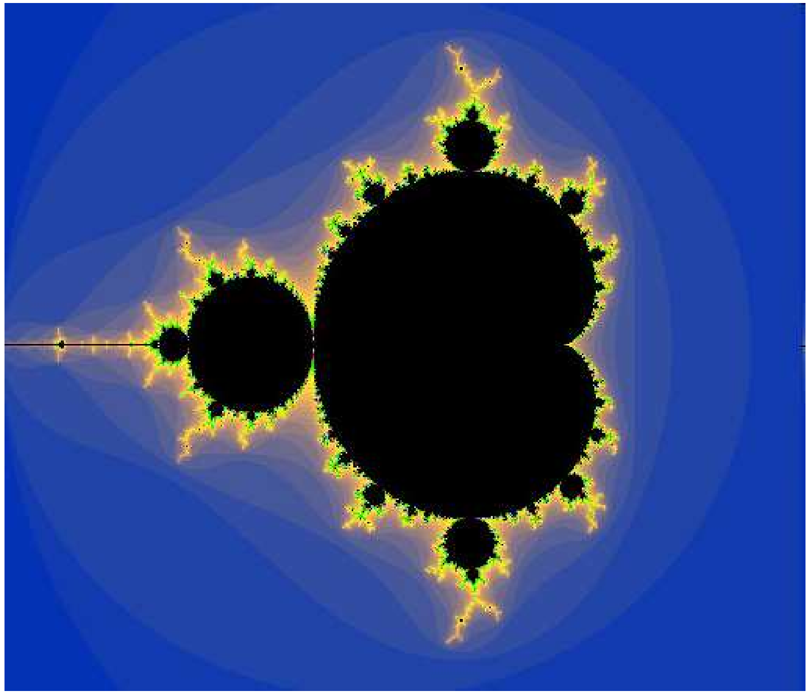
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

så länge som

$$|z_{n+1}| < 2$$

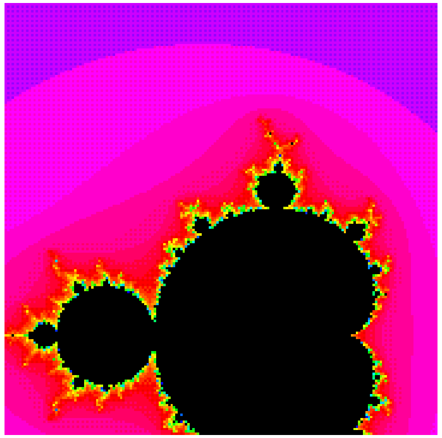
antalet varv blir punktens färg

$$n = color$$



Mandelbrot_color_zoom.gif

William Sandqvist william@kth.se



William Sandqvist william@kth.se