KTH, Matematik, Maria Saprykina

SF1633 Differentialekvationer I
Lösningsförslag till KS2, den 27 april 2015

1. (3p) En av lösningar till den homogena differentialekvationen

$$x^3y'' + x^2y' - 4xy = 0, \quad x > 0$$

har form $y(x) = x^2$. Bestäm den allmänna lösningen till ingomogena differentialekvationen

$$x^3y'' + x^2y' - 4xy = -3, \quad x > 0.$$

Bestäm även den lösning som uppfyller $y(1) = 4$, $y'(1) = 1$.

Lösning: Först söker vi den allmänna lösningen till ekvationen mha reduktion av ordning. Vi söker den andra lösningen på formen $y(x) = x^2u(x)$. Deriverar ansatsen och sätter in den i ekvationen:

$$x^3(x^2u'' + 4xu' + 2y) + x^2(x^2u' + 2xu) - 4x^3u = -3.$$

Förenkling ger:

$$x^5u'' + 5x^4u' = -3.$$

Sätt $w = u'$, så $w' = u''$. Vi får

$$x^5w' + 5x^4w = -3.$$

Man kan lösa denna ekvation mha integrerande faktor. Men vi noterar att vänsterledet är $(x^5w)'$. Vår ekvation är alltså $(x^5w)' = -3$. Integrera map x:

$$x^5w = -3x + C \;\Leftrightarrow\; w = -3x^{-4} + Cx^{-5} \;\Leftrightarrow\; u = \int w(x)dx = x^{-3} - \frac{C}{4}x^{-4} + C_2.$$

$y(x) = x^2u(x) = x^{-1} + C_1x^{-2} + C_2x^2$. Denna formel definierar faktiskt den allmänna lösningen till ekvationen.

Antag att $y(x) = x^{-1} + ax^{-2} + bx^2$ är en lösning till begynnelsevärdesproblemmet; vi ska bestämma konstanterna a och b. Vi har: $y' = -x^{-2} - 2ax^{-3} + 2bx$. Villkoren $y(1) = 4$, $y'(1) = 1$ ger: $a = 1$, $b = 2$. Lösningen till begynnelsevärdesproblemmet är $y(x) = x^{-1} + x^{-2} + 2x^2$

2. (3p) Lös system av differentialekvationer

$$\begin{cases} x' = -x - 4y; \\ y' = x - y. \end{cases}$$

Skissa en typisk lösning.

Lösning: Systemet kan skrivas som $X' = AX$ där $X = (x, y)^T$ (bokstaven T i notationen betyder att X är en *kolonn*-vektor med komponenter (x, y)), och

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Den karakteristiska ekvationen har form $det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 + 4 = 0$. Denna har rötter $\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}i$ och $\lambda_2 = -1 - \sqrt{2}i$.

Söker egenvektor K motsvarande λ_1:

$$0 = (A - \lambda_1 I)K = \begin{pmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{pmatrix}.$$

Man kan ta $K = (2i, 1)^T$. Beteckna $B_1 = Re(K) = (0,1)^T$, $B_2 = Im(K) = (2,0)^T$. Med denna notation finner vi två linjärt oberoende lösningar på formen:

$$\begin{aligned} X_1 =& (B_1 \cos 2t - B_2 \sin 2t)e^{-t} = \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} e^{-t} \\ X_2 =& (B_2 \cos 2t + B_1 \sin 2t)e^{-t} = \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} e^{-t} \end{aligned}$$

och den allmänna lösningen har form

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2$$

där C_1 och C_2 är godtyckliga konstanter.

Eftersom egenvärden för systemets matris A är komplexa med en negativ realdel, är typen av den kritiska punkten 0 stabil spiral. Det återstår att se om spiralen är moturs eller medurs. Betrakta tangentvektorn till en bana som går genom punkten $(1,0)$. Denna vektor får man om man sätter in $x = 1$, $y = 0$ i systemet (eftersom systemet är autonomt). Vi får vektor $(-1, 1)$, alltså går spiralen moturs.

3. (3p) Bestäm de kritiska punkterna till autonoma systemet

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2; \\ y' = xy - 4. \end{cases}$$

Klassificera de kritiska punkterna med avseende på stabilitet/instabilitet samt ange typ (d v s nod, sadelpunkt, spiral m m).

Lösning: De kritiska punkterna ges av

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0; \\ xy - 4 = 0. \end{cases}$$

Den första ekvationen har lösningar $x = y$ eller $x = -y$.

Om $x = y$, ger den andra ekvationen $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ eller $x = -2$. Motsvarande kritiska punkter är $(2,2)$ och $(-2,-2)$.

Om $x = -y$, ger den andra ekvationen $-x^2 = 4$. Denna ekvation har inga reella rötter.

För att klassificiera punkterna, beräknar egenvärden för Jacobianen. Betrakta punkten $(2,2)$ först.

$$J = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}; \quad J|_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Denna matris har komplexa egenvärden $\lambda = 3 \pm \sqrt{7}i$. Den kritiska punkten är en instabil spiral.

Betrakta punkten $(-2,-2)$.

$$J|_{(-2,-2)} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Denna matris har komplexa egenvärden $\lambda = -3 \pm \sqrt{7}i$. Den kritiska punkten är en stabil spiral.