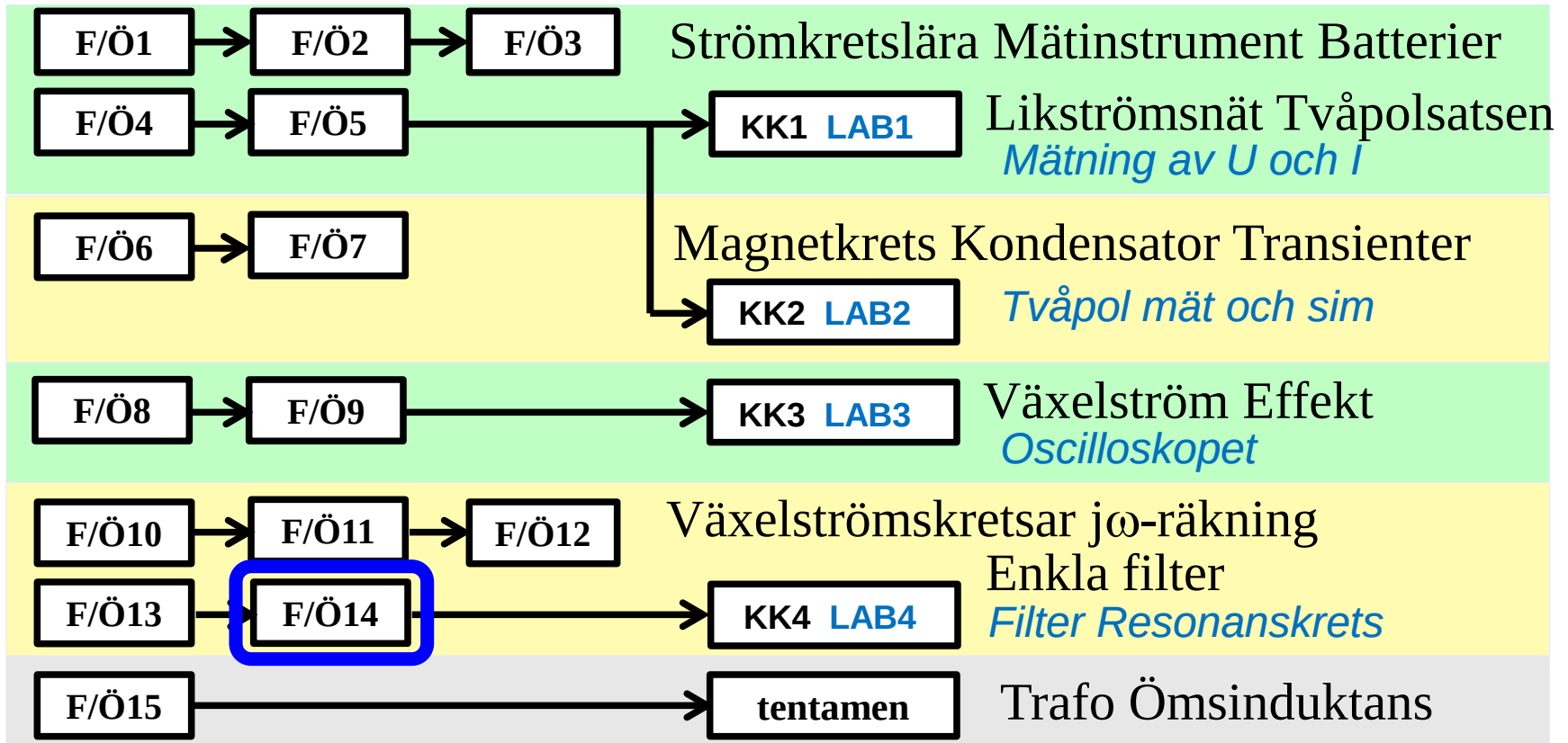


IF1330 Ellära



*Föreläsningar och övningar bygger på varandra! Ta alltid igen det Du missat!
Läs på i förväg – delta i undervisningen – arbeta igenom materialet efteråt!*

Komplexa visare, $j\omega$ -metoden

- Komplexa visare. OHM's lag för R L och C .

$$\underline{U}_R = \underline{I}_R \cdot R$$

$$\underline{U}_L = \underline{I}_L \cdot jX_L = \underline{I}_L \cdot j\omega L$$

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

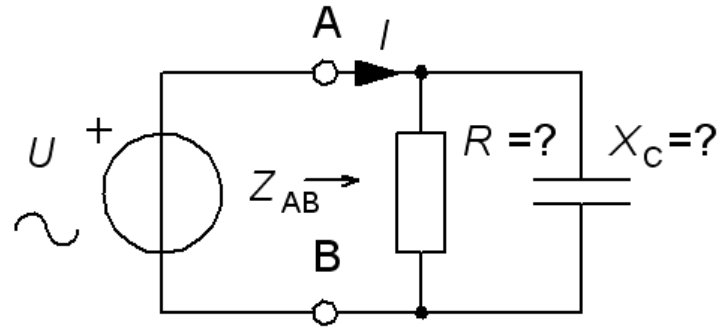
$$\underline{U}_C = \underline{I}_C \cdot jX_C = \underline{I}_C \cdot \frac{1}{j\omega C} = \underline{I}_C \cdot j\left(-\frac{1}{\omega C}\right)$$

- Komplexa visare. OHM's lag för Z .

$$\boxed{\underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z}} \quad \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \quad \varphi = \arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}[\underline{Z}]}{\operatorname{Re}[\underline{Z}]}\right)$$

13.1 Räkna själv ...

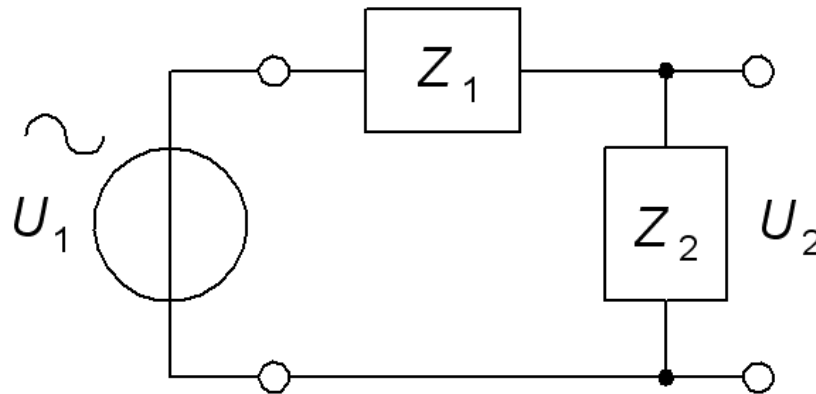
Ställ upp det komplexa uttrycket för strömmen I uttryckt i $U R C \omega$. Låt U vara riktfas, dvs. reell. Svara med ett uttryck på formen $a+jb$.



$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C = \frac{U}{R} + \frac{U}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{U}{R} + j\omega C \cdot U$$

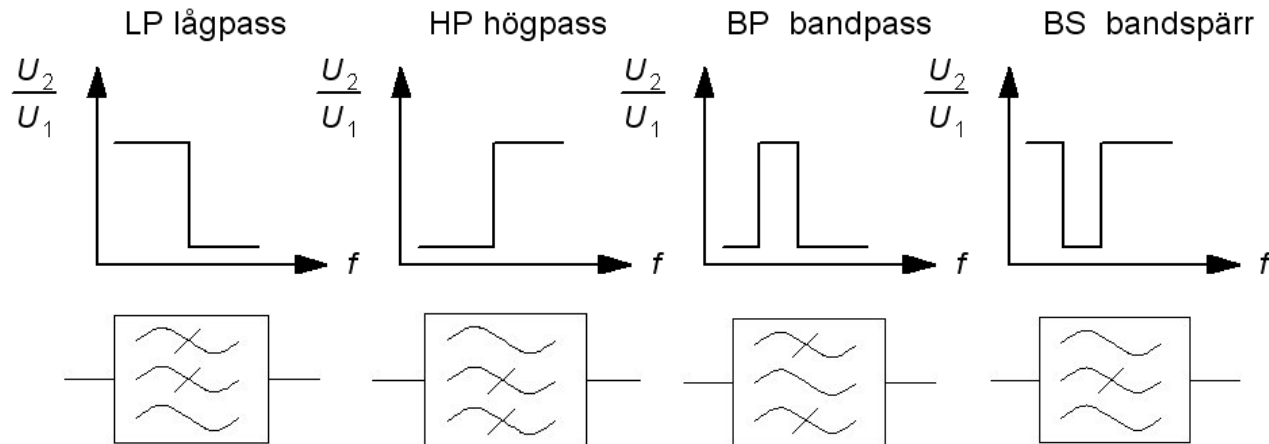
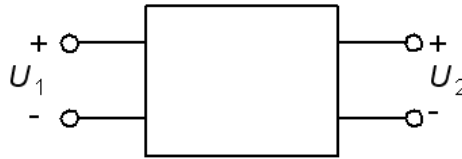
Spänningsdelarens överföringsfunktion

Enkla filter är ofta utformade som spänningsdelare. Ett filters **överföringsfunktion**, $H(\omega)$ eller $H(f)$, är kvoten mellan utspänning och inspänning. Den kvoten får man *direkt* från spänningsdelningsformeln!



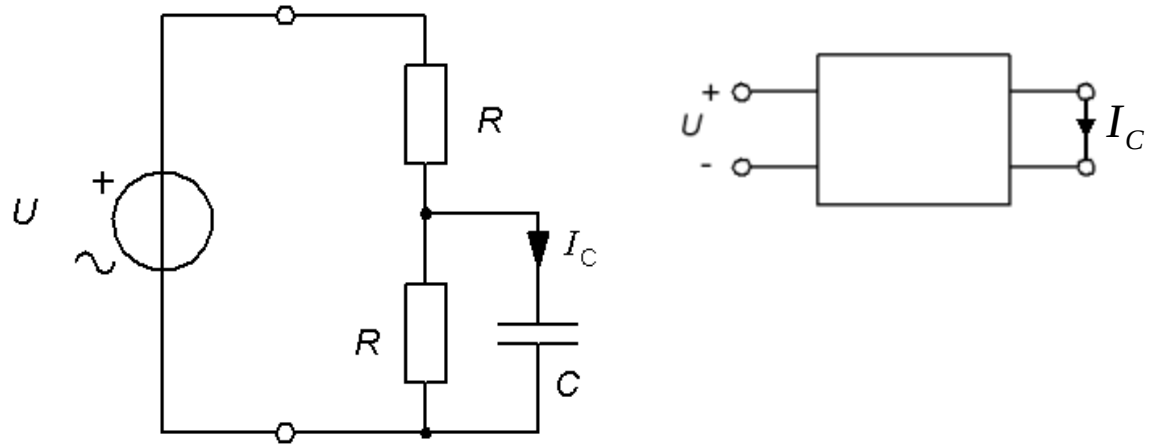
$$\underbrace{U_2}_{\uparrow} = U_1 \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \Rightarrow \boxed{H(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}}$$

LP HP BP BS



BP eller BS filtren kan ses som olika kombinationer av LP och HP filter.

16.3 Överföringsfunktion



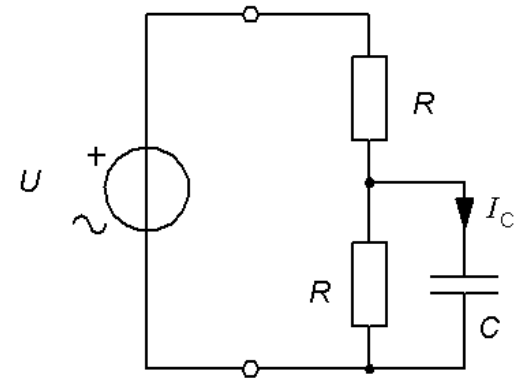
- a) Ställ upp ett uttryck för $I_C = f(U, \omega, R, C)$.
- b) Ställ upp överföringsfunktionen I_C/U **beloppsfunktion** och **fasfunktion**.
- c) Vilken filterkaraktär har överföringsfunktionen, LP HP BP BS ?
- d) Vilken **gränshfrekvens** har överföringsfunktionen?

16.3 Överföringsfunktion

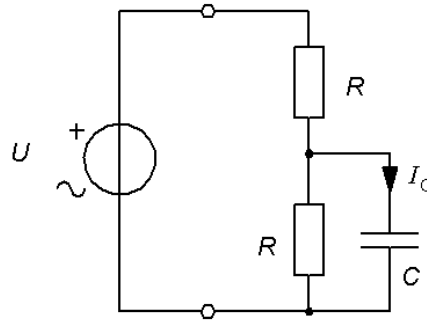
Svar a)

$$R \parallel C = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{j\omega C}{j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\frac{1}{j\omega C}} = \underline{U}_C \cdot j\omega C$$



16.3 Överföringsfunktion

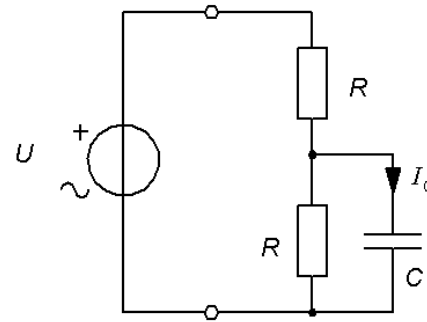


$$\underline{U}_C = \underline{U} \frac{\frac{R}{1+j\omega RC}}{R + \frac{R}{1+j\omega RC}} \cdot \frac{1+j\omega RC}{\frac{R}{1+j\omega RC}} = \underline{U} \frac{1}{1+j\omega RC + 1} \Rightarrow$$

$$\underline{I}_C = \underline{U} \frac{j\omega C}{2+j\omega RC}$$

16.3 Överföringsfunktion

Svar b) I_C/U



$$\frac{\underline{I}_C}{\underline{U}} = \frac{j\omega C}{2 + j\omega RC}$$

$$\frac{\underline{I}_C}{\underline{U}} = \frac{\omega C}{\sqrt{4 + (\omega RC)^2}}$$

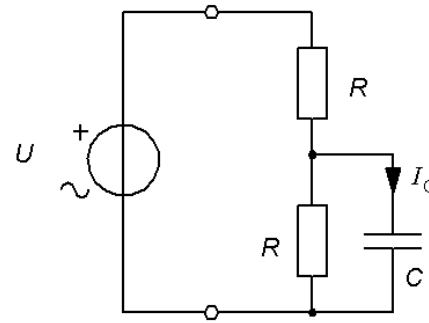
$$\arg\left(\frac{\underline{I}_C}{\underline{U}}\right) = 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega RC}{2}\right)$$

$$\arg\left(\frac{\underline{I}_C}{\underline{U}}\right) = \arctan\left(\frac{2}{\omega RC}\right)$$

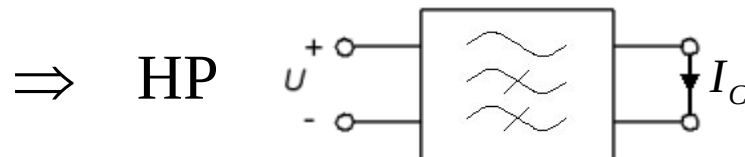
16.3 Överföringsfunktion

Svar c) LP HP BP BS?

$$\frac{\underline{I}_C}{\underline{U}} = \frac{j\omega C}{2 + j\omega RC}$$



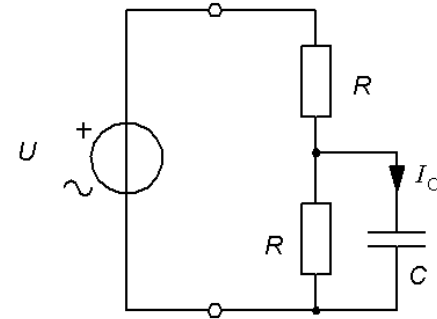
$$\frac{\underline{I}_C}{\underline{U}} \{ \omega = 0 \} = \frac{0 \cdot j}{2 + 0 \cdot j} = 0 \quad \frac{\underline{I}_C}{\underline{U}} \{ \omega = \infty \} = \frac{1}{R}$$



16.3 Överföringsfunktion

Svar d) Gränsfrekvens?

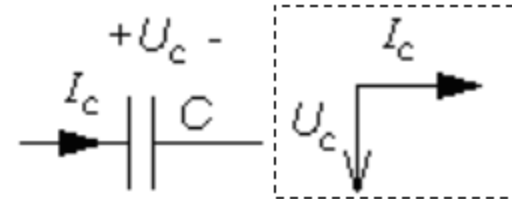
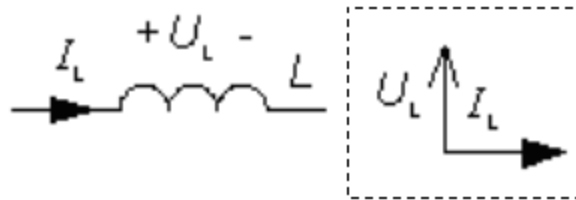
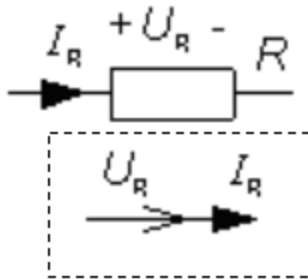
Vid gränsfrekvensen ”väger nämnarens realdel och imaginärdel lika”.



$$\frac{\underline{I}_C}{\underline{U}} = \frac{j\omega C}{2 + j\omega RC} \quad \omega RC = 2 \quad \Rightarrow \quad f_G = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{RC}$$

$$\frac{\underline{I}_C}{\underline{U}} = \frac{j\omega C}{2 + j\omega RC} = \frac{j\frac{2}{R}}{2 + j2} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_C}{U} = \frac{\frac{2}{R}}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{1}{R \cdot \sqrt{2}}$$

Phasor - vektor



$$\omega = 2\pi f$$

$$|X_L| = \omega \cdot L$$

$$|X_C| = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

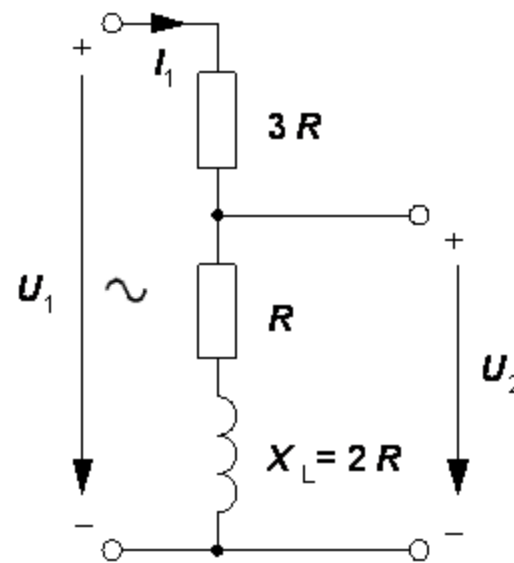
$$Z = \frac{U}{I}$$

12.7 Visardiagram

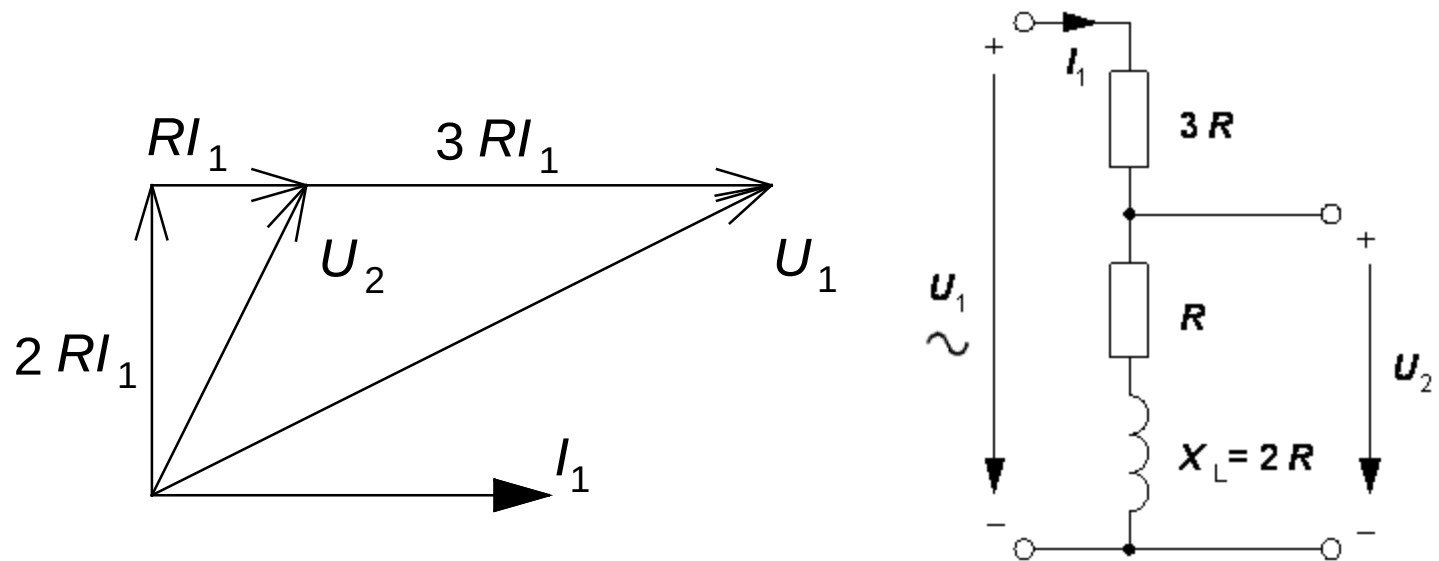
Figuren visar en spänningsdelare. Denna matas med en växelspänningen U_1 och utspänningen är spänningen U_2 . Vid den aktuella frekvensen är spolens reaktans $X_L = 2R$.

Rita kretsens visardiagram med I_1 , U_1 och U_2 .

Använd I_1 som riktfas (= horisontell).



12.7 Visardiagram

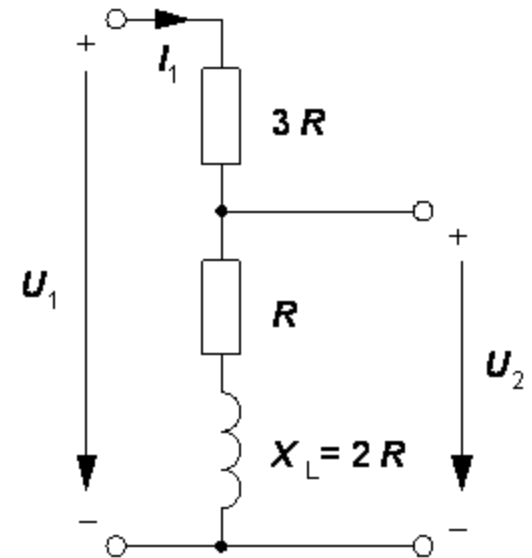


$j\omega$ -räkning sp-delare

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R + j\omega L}{4R + j\omega L} \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{\sqrt{16R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$X_L = \omega L = 2R \Rightarrow$$

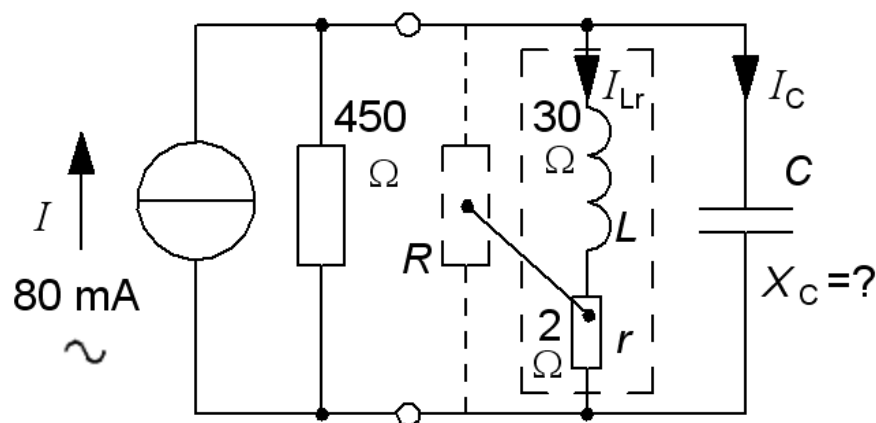
$$\boxed{\frac{U_2}{U_1}} = \frac{\sqrt{R^2 + (2R)^2}}{\sqrt{16R^2 + (2R)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$



15.5 Parallell-resonans

En parallellresonanskrets matas från en strömgenerator som levererar 80 mA vid resonansfrekvensen $f_0 = 20$ kHz.

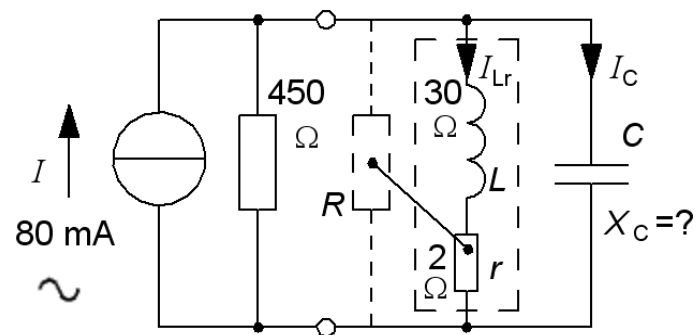
- a) Kontrollera att spolens $Q > 10$. Räkna om serieresistansen r till parallellresistans R .
- b) Hur stor blir den resulterande impedansen (källa+resonanskrets) vid resonansfrekvensen?
- c) Beräkna strömmarna I_{Lr} och I_C .
- d) Vilka värden har L och C ?
- e) Beräkna resulterande Q -värde och bandbredd.



15.5 Parallell-resonans

a) Q-värde och parallellresistans:

b) $Z_{ERS} = ?$

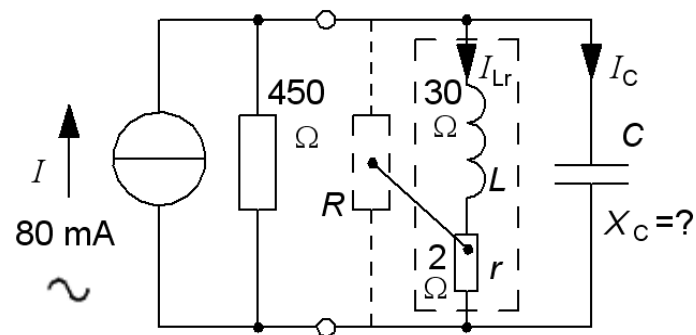


$$Q = \frac{X_L}{r} = \frac{30}{2} = 15 \quad R = Q^2 \cdot r = 15^2 \cdot 2 = 450 \Omega$$

$$Z_{ERS} = 450 || 450 = 225 \Omega.$$

15.5 Parallell-resonans

c) I_C och $I_{LR} = ?$ Beräkna U .

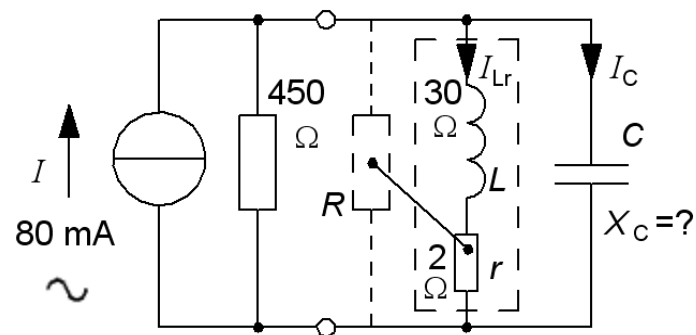


$$I \cdot Z_{\text{ERS}} = 80 \cdot 10^{-3} \cdot 225 = 18 \text{ V} \quad \underline{I}_C = \frac{18}{-j30} \Rightarrow I_C = 0,6 \text{ A} \angle +90^\circ$$

$$\underline{I}_{Lr} = \frac{18}{2 + j30} \Rightarrow I_L \approx 0,6 \text{ A} \angle -86^\circ$$

15.5 Parallell-resonans

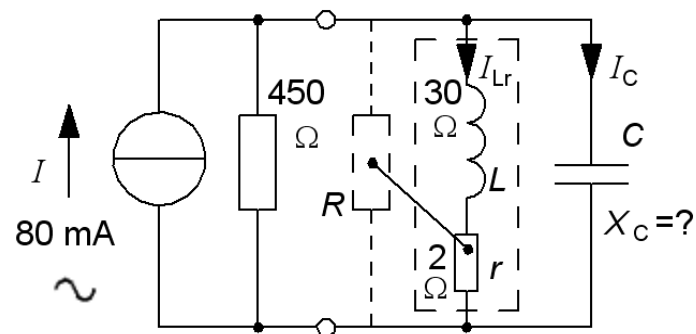
d) Beräkna L och C .



$$L = \frac{X_L}{2\pi f_0} = \frac{30}{2\pi \cdot 20 \cdot 10^3} = 0,24 \text{ mH} \quad C = \frac{1}{2\pi f_0 \cdot |X_C|} = \frac{1}{2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 30} = 265 \text{ nF}$$

15.5 Parallell-resonans

e) Beräkna Q_{TOT} och resulterande BW .

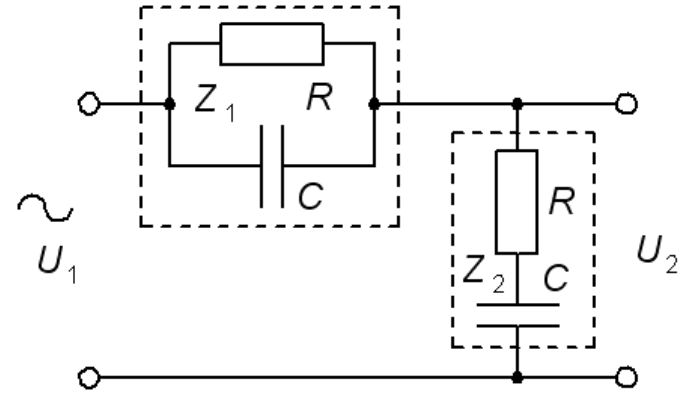


$$Q_{\text{TOT}} = \frac{225}{30} = 7,5 \quad BW = \frac{f_0}{Q} = \frac{20 \cdot 10^3}{7,5} = 2,67 \text{ kHz}$$

(16.7) Wienbryggan "baklänges"

Figuren visar Wienbryggan "baklänges".

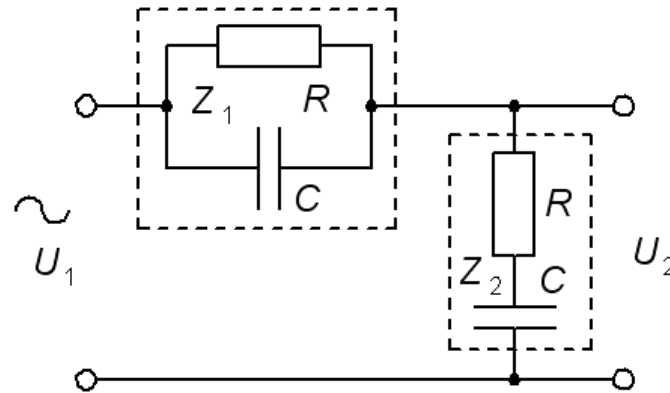
- a) Tag fram filtrets överföringsfunktion.
- b) (Skissa beloppsfunktion och fasfunktion.)
- c) Vilket belopp och vilken fasvinkel har överförings-funktionen när $\omega = 1/RC$?



$$\underline{Z}_1 = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

$$\underline{Z}_2 = R + \frac{1}{j\omega C} = \frac{1 + j\omega RC}{j\omega C}$$

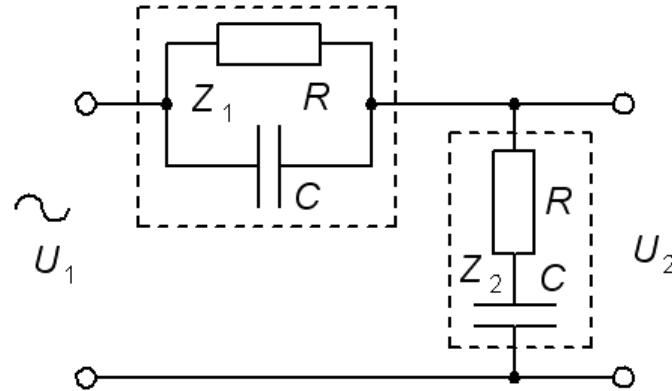
(16.7) Wienbryggan "baklänges"



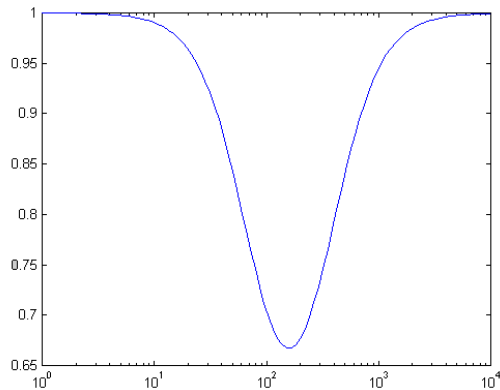
$$\begin{aligned} \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} &= \frac{1+j\omega RC}{j\omega C} \cdot \frac{j\omega C(1+j\omega RC)}{j\omega C(1+j\omega RC)} = \frac{(1+j\omega RC)^2}{(1+j\omega RC)^2 + j\omega RC} = \\ &= \frac{1-(\omega RC)^2 + 2j\omega RC}{1-(\omega RC)^2 + 2j\omega RC + j\omega RC} = \frac{1-(\omega RC)^2 + 2j\omega RC}{1-(\omega RC)^2 + 3j\omega RC} \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{1}{RC} \Rightarrow \omega RC = 1 \Rightarrow \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{2}{3} \quad \arg\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) = 0$$

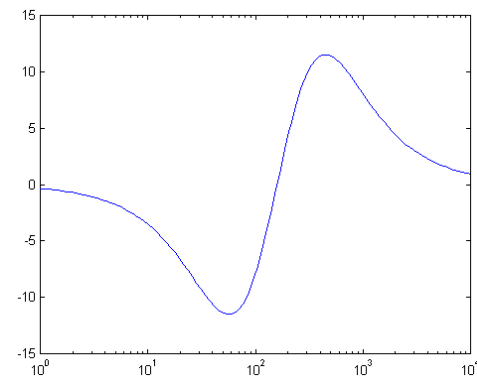
(16.7) Wienbryggan "baklänges"



Beloppskurva BS-filter



Faskurva



Fler filtertal från ex-tentor – om tiden tillåter ...

Filter RLR

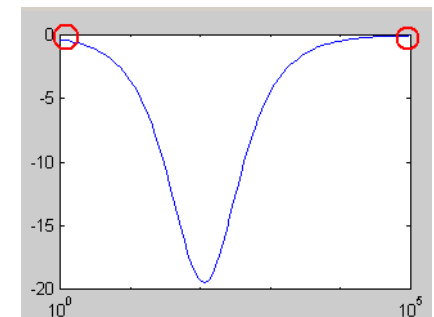
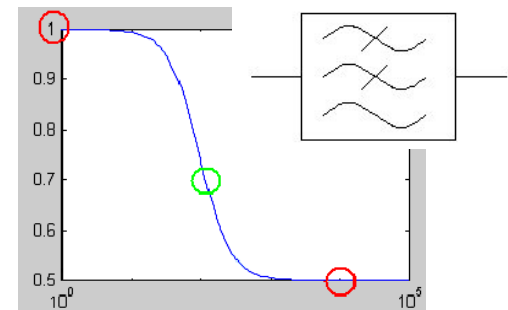
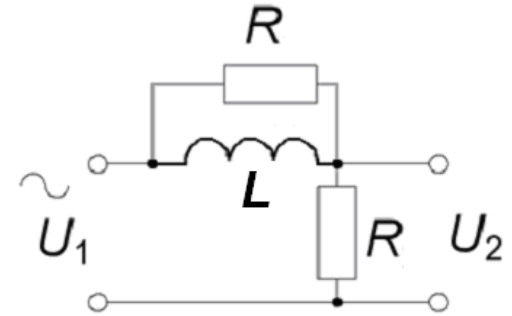
$$a) \quad R \parallel L = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} \quad \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L}} = \frac{1}{1 + \frac{1 \cdot j\omega L}{R + j\omega L}} = \frac{\frac{R + j\omega L}{R + j\omega L}}{\frac{R + j\omega L + j\omega L}{R + j\omega L}} = \frac{R + j\omega L}{R + j2\omega L}$$

$$b) \quad \left| \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right| = \left| \frac{R + j\omega L}{R + j2\omega L} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{\sqrt{R^2 + (2\omega L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 2R^2 + 2(\omega L)^2 = R^2 + 4(\omega L)^2$$

$$R^2 = 2(\omega L)^2 \Rightarrow \omega_x = \frac{R}{L\sqrt{2}}$$

$$c) \quad \frac{R + j\omega L}{R + j2\omega L} \quad \omega \rightarrow 0 \quad \frac{R + 0}{R + 0} = 1 \Rightarrow \left| \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right| = 1 \quad \arg\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) = 0^\circ$$

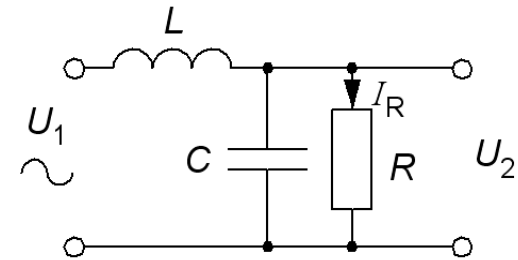
$$d) \quad \frac{R + j\omega L}{R + j2\omega L} \Rightarrow \frac{\frac{R}{\omega} + jL}{\frac{R}{\omega} + j2L} \quad \omega \rightarrow \infty \quad \frac{0 + jL}{0 + j2L} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right| = 0,5 \quad \arg\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right) = 0^\circ$$



Filter LCR if time ...

Figuren visar ett enkelt filter med L C och R .

- a) Härled filtrets överföringsfunktion $\underline{U}_2/\underline{U}_1$.
- b) Vid vilken vinkelfrekvens ω_x blir nämnaren rent imaginär? Ge ett uttryck för denna frekvens ω_x med R L och C .



- c) Vilket värde har beloppsfunktionen vid denna vinkelfrekvens, ω_x ?
- d) Vilket värde har fasfunktionen vid denna vinkelfrekvens, ω_x ?
- e) Ge ett uttryck för överföringsfunktionen mellan överföringsfunktion $\underline{I}_R/\underline{U}_1$ (Obs! Du har redan överföringsfunktionen $\underline{U}_2/\underline{U}_1$ från a)

$$a) \frac{\underline{U}_2(\omega)}{\underline{U}_1(\omega)} = ? \quad b) \omega_x(R, L, C) = ? \quad c) \left| \frac{\underline{U}_2(\omega_x)}{\underline{U}_1(\omega_x)} \right| = ? \quad d) \arg\left(\frac{\underline{U}_2(\omega_x)}{\underline{U}_1(\omega_x)} \right) = ? \quad e) \frac{\underline{I}_R(\omega)}{\underline{U}_1(\omega)} = ?$$

Filter LCR if time ...

$$a) b) \quad R \parallel C = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{j\omega C}{j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{R}{1 + j\omega RC}}{j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC}} \cdot \frac{1 + j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{R}{j\omega L(1 + j\omega RC) + R} =$$

$$= \frac{R}{(R - \omega^2 RLC) + j\omega L} \quad RE\left[\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right] = 0 \Rightarrow \omega^2 RLC = R \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$c) \quad \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{(R - \omega^2 RLC) + j\omega L} = \left\{ \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \right\} = \frac{R}{0 + j\sqrt{\frac{L}{C}}} \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$d) \quad \arg\left[\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right] = \arg\left[\frac{R}{j\sqrt{\frac{L}{C}}}\right] = -90^\circ$$

$$e) \quad \frac{\underline{I}_R}{\underline{U}_1} = ? \quad \underline{I}_R = \frac{\underline{U}_2}{R} \Rightarrow \frac{\underline{I}_R}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{(R - \omega^2 RLC) + j\omega L}$$

