KTH Datavetenskap
och kommunikation

DT1130 Spektrala transformer
Tentamen 150408

Tentamen består av fem uppgifter där varje uppgift maximalt ger 4 p. Normalt gäller följande betygsgränser: **E: 9 p, D: 11.5 p, C: 14 p, B: 16 p, A: 18 p**
Tillåtna hjälpmedel: räknare, formelblad (bifogat)

Lycka till!

1

En analog fyrkantvåg $x_1(t)$ med frekvensen 100 Hz samplas med samplingsfrekvensen f_s.

a Skissa $|X(\omega)|$ - spektrum av $x_1(t)$ *1p*

b Hur ska man välja f_s om man vill behålla alla deltoner vars amplitud är minst en tiondel av den högsta deltonens amplitud? *3p*

Tips: utnyttja fourierserien för fyrkantvåg (se formelsamling)

2

I figur 1 ser du frekvenssvar (till vänster) och insignal/utsignal-plottar (till höger) för ett antal linjära tidsinvarianta sytstem. I insignal/utsignal-plottarna har en fyrkantvåg (1,-1) utgjort insignalen (streckad linje), och utsignalen är heldragen. Para ihop rätt frekvenssvar med rätt in/utsignalplot! Observera att det blir ett in/utsignalplot över. Motivera kort varje par. *(1p/ korrekt par)*

3

Ingenjör Inge Naning har fått i uppgift att undresöka ett tidsdiskret filter som inkommit till avdelningen för oidentifierade linjära system. På filtret står att läsa texten *Tidsinvariant och tidsdiskret filter utan återkoppling.*

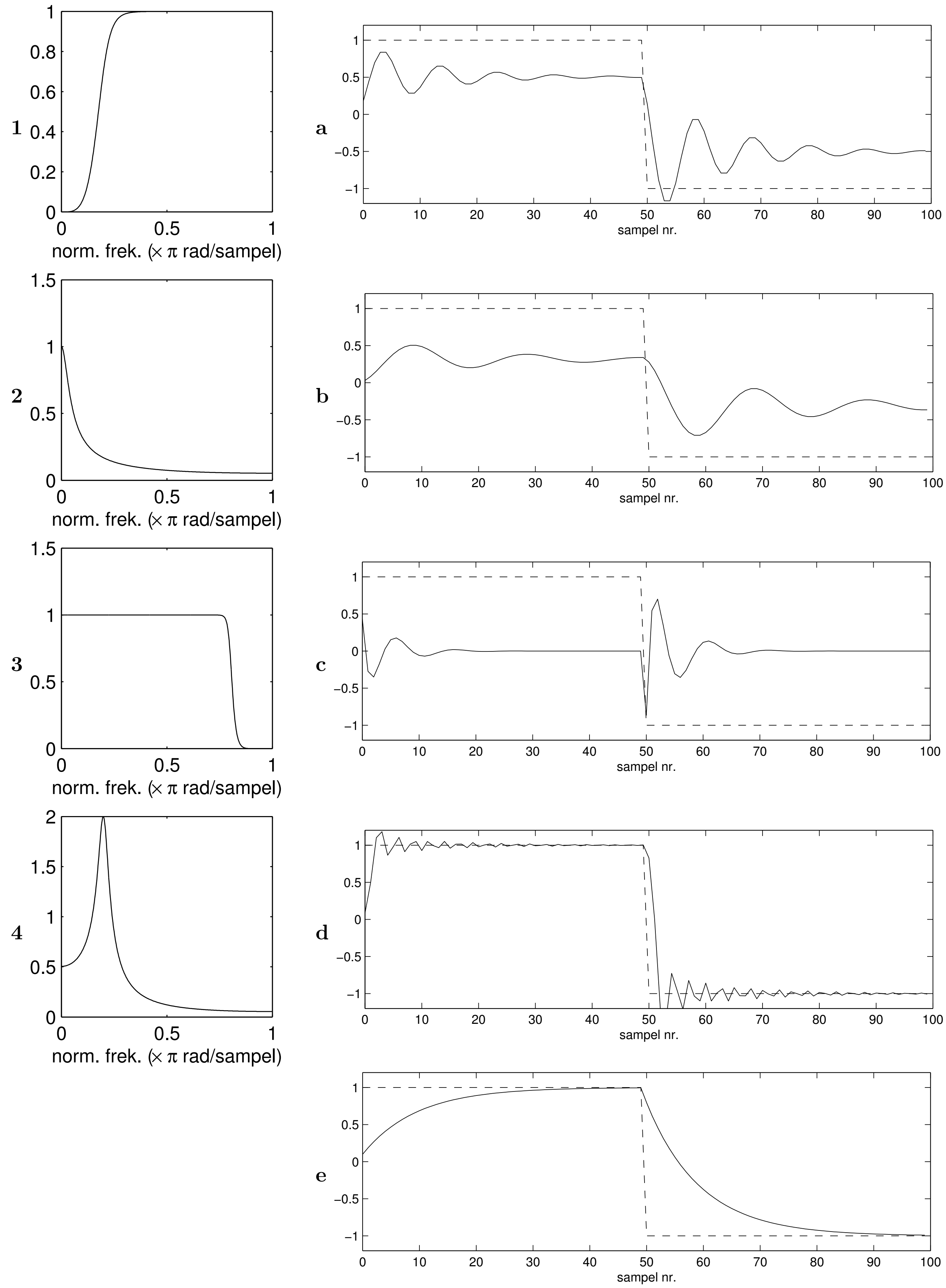
Inge matar filtret med en speciell testsignal $x(n)$, och observerar då utsignalen $y(n)$ (se figur 2).

Inge behöver nu din hjälp att

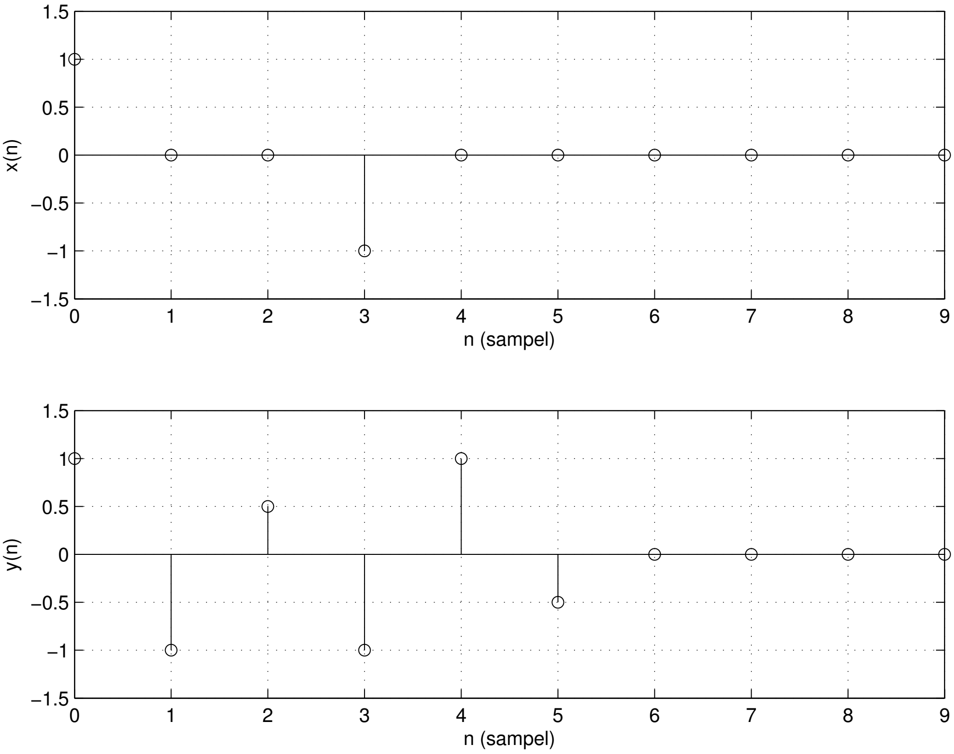
a Ta fram differensekvationen för filtret ($y(n) = ...$)

b Räkna ut filtrets nollställen i z-planet

c Skapa ett inversfilter, och rita upp ett filterschema för detta. Inversfiltret ska alltså, då det kaskadkopplas med det okända filtret, ger ett system vars sammantagna impulssvar är en impuls - $\delta(n)$.



2 (7) **Figur 1.** Vilket frekvenssvar hör till vilken in/utsignal?



Figur 2. Insignal $x(n)$ och utsignal $y(n)$ för Inges filter

4

a Beskriv principen för transformbaserad bildkodning, typ JPEG. Hur fungerar det, och varför? *(3p)*

b Förklara med utgångspunkt i föregående svar varför foton lämpar sig bättre för JPEG-komprimering än t.ex. datorgenererade linjeritningar och text. *(1p)*

5

Ett återkopplat filter har två poler, belägna i $Re^{j\theta}$ och $Re^{-j\theta}$, samt två nollställen i origo.

Ange, på enklaste möjliga form:

a) Överförinfunktionen $H(z)$ *(1p)*

b) Differensekvationen för filtret, dvs. $y(n) = ...$ *(1p)*

c) Impulssvaret $h(n)$. Vilken effekt har R och θ på filtrets impulssvar? *(2p)*

tips: använd partialbråksuppdelning + tabell i formelsamlingen för att transformera H(z) till h(n).

LÖSNINGAR

1

a

Deltoner ges av fourierserien för fyrkantvåg: endast udda deltoner (frekvenser som är en udda multipel av grundtonsfrekvensen). Amplituden avtar enligt $1/k$ dvs om 100 Hz har amplituden 1, så kommer nästa delton ha frekvensen 300 Hz och amplituden 1/3, nästa 500 Hz med amplituden 1/5, 700 Hz med amplituden 1/7 osv.

b

Den högsta deltonen är grundtonen (100 Hz). En tiondel fås enl. $1/k$ vid delton 10 (som visserligen är noll eftersom den är jämn så egentligen räcker det med delton 9). delton 10 har frekvensen 1000 Hz, vilket ger att samplingsfrekvensen måste vara dubblet så hög dvs 2000 Hz.

2

1 - c	Frekvenssvaret är högpass, ingen DC slipper igenom, utsignalen ska svänga in mot noll, och det gör den bara i *c*.
2 - e	Frekvenssvaret är ett lågpassfilter med låg brytfrekvens, i princip bara DC slipper igenom → långsamma rörelser i utsignalen.
3 - d	Brant lågpass-filter, med hög brytfrekvens "ringningar" uppåt nykvistfrekvensen. Förstärkning=1 vid $\omega = 0$ innebär att utsignalen ska svänga in mot insignalen.
4 - a	Frekvenstopp vid ca 0.2π innebär en svängningsperiod på 10 sampel, vilket stämmer med *a*, men inte *b*. DC-förstärkning = 0.5, utsignalen ska svänga in mot 0.5 × utsignalen, tyder också på *a*.

3

a

Insignalen $x(n)$ består av två impulser; en positiv vid $n = 0$ och en negativ vid $n = 3$. Utsignalen $y(n)$ upprepas spegelvänt efter den andra impulsen vilket innebär att impulssvaret har längden 3 och består av de tre första samplen i $y(n)$ dvs 1,-1 och 0.5. Detta ger

$$y(n) = x(n) - x(n-1) + 0.5x(n-2)$$

b

Differensekvationen ger direkt

$$H(z) = 1 - z^{-1} + 0.5z^{-2} = \frac{z^2 - z + 0.5}{z^2}$$

Nollställena ($H(z) = 0$, använd PQ-formeln):

$$z = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}j$$

c

Inversfiltret ges av

$$\frac{1}{H(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

vilket skrivs om till

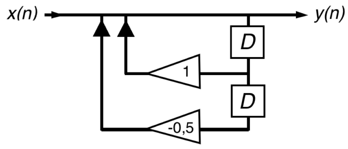
$$Y(z)[1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}] = X(z)$$

övergång till tidsdomän ger

$$y(n) - y(n-1) + 0.5y(n-2) = x(n)$$

$$y(n) = x(n) + y(n-1) - 0.5y(n-2)$$

vilket motsvaras av filterschemat



4

a

JPEG-kodningen innebär att bilden först delas in i block, om 8x8 pixlar. Dessa block transformeras sedan med DCT, vilket resulterar i en koefficientmatris, där koefficienter som motsvarar låga spatiala frekvenser återfinns i ena hörnet och höga frekvenser i andra. Kodningen bygger på att den lågfrekventa informationen är perceptuellt viktigare, dvs den högfrekventa informationen inte behöver representeras med lika många bitar, och mycket information kan kastas bort. Detta görs genom att kvantisera koefficientmatrisen på ett sådant sätt att högfrekvenskoefficienter kvantiseras hårdare än de "låga". (Många koefficienter blir dessutom i praktiken noll vid kvantiseringen och dessa kan packas extra effektivt med traditionella metoder).

b

Vid JPEG-kodnign av linjeritningar och andra bilder som innehåller mycket skarpa kanter så uppkommer artefakter i bilden, som beror på att skarpa kanter kräver mycket högfrekvent information för att representeras korrekt. Om bilden dessutom bara innehåller ett fåtal färger (t.ex. bara svart och vitt) så blir dessa artefakter extra tydliga.

5

a

Utifrån polernas och nollställenas lägen kan vi direkt konstruera överföringsfunktionen som

$$H(z) = \frac{z^2}{(z - Re^{j\theta})(z - Re^{-j\theta})} = \frac{z^2}{(z^2 - zR(e^{j\theta} - Re^{-j\theta}) + R^2)} = \frac{1}{(1 - z^{-1}2R\cos\theta + z^{-2}R^2)}$$

b

$H(z)$ ovan ger att

$$Y(z)(1 - 2R\cos\theta z^{-1} + R^2 z^{-2}) = X(z)$$

vilket vi kan transformera till tidsdomänen enligt nedan:

$$y(n) - 2R\cos\theta y(n-1) + R^2 y(n-2) = x(n)$$

$$y(n) = x(n) + 2R\cos\theta y(n-1) - R^2 y(n-2)$$

c

För att få impulssvaret behöver i inverstransformera $H(z)$ till tidsdomänen. För att kunna göra det behöver vi först skriva $H(z)$ på en form som finns i z-transformtabellen (i formelsamlingen), dvs vi vill som mest ha ett första ordningens polynom i nämnaren. Vi kan åstadkomma detta med partialbråksuppdelning. Ansätt:

$$H(z) = \frac{Az}{z - Re^{j\theta}} + \frac{Bz}{z - Re^{-j\theta}}$$

Vi ska nu försöka bestämma konstanterna A och B. Sätt på samma bråkstreck och förenkla:

$$H(z) = \frac{Az(z - Re^{-j\theta}) + Bz(z - Re^{j\theta})}{(z - Re^{j\theta})(z - Re^{-j\theta})}$$

$$= \frac{(A+B)z^2 - (ARe^{-j\theta} + BRe^{j\theta})z}{(z - Re^{j\theta})(z - Re^{-j\theta})}$$

Detta uttryck måste blir identiskt med överföringsfunktionen i *a)* vilket ger följande ekvationer:
z^2-termen ger $A + B = 1$ z-termen ger $ARe^{-j\theta} + BRe^{j\theta} = 0$
Sätt in den första i den andra och förenkla:

$$ARe^{-j\theta} + (1 - A)Re^{j\theta} = 0$$

$$\frac{Re^{j\theta}}{Re^{j\theta} - Re^{-j\theta}} \qquad \to B = -\frac{Re^{-j\theta}}{Re^{j\theta} - Re^{-j\theta}}$$

Nu kan vi inverstransformera det uppdelade uttrycket för $H(z)$ med hjälp av 4:e z-transformen i formelsamlingen:

$$h(n) = A(Re^{j\theta})^n u(n) + B(Re^{-j\theta})^n u(n)$$

Sätt slutligen in A och B enl. ovan och förenkla med eulers formler:

$$h(n) = \frac{Re^{j\theta}(Re^{j\theta})^n - Re^{-j\theta}(Re^{-j\theta})^n}{R(e^{j\theta} - e^{-j\theta})} u(n) = \frac{R^n \sin(\theta(n+1))}{\sin\theta} u(n)$$

Detta impulssvar beskriver en dämpand svängning, där R bestämmer hur fort amplituden ska avta (stort R - långsam avklingning) och θ är svängningens vinkelfrekvens.