Lösningar KS2, SG1109, 12/5, 2015

1. Se avsnitt 9.2 i boken!

2. Kollisionen är fullständigt plastisk vilket innebär att partiklarna har samma hastighet v_2 efter stöten. Rörelsemängdens bevarande ger

$$m_1 v = m_1 v_2 + m_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v \,. \tag{1}$$

   Skillnaden mellan den kinesiska energin T_1 före kollisionen och den kinesiska energin T_2 efter kollisionen blir alltså

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= \frac{1}{2} m_1 v^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v}{m_1 + m_2}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} m_1 v^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 > 0 \,. \end{aligned} \tag{2}$$

3. Eftersom r_{min} och r_{max} är extrempunkter så kommer partikelns hastighet vara vinkelrät mot $\mathbf{r}$ i båda dessa punkter. Minimal hastighet fås då $r = r_{max}$ och maximal hastighet fås då $r = r_{min}$. Rörelsemängdsmomentets bevarande ger:

$$r_{min} v_{max} = r_{max} v_{min} \Rightarrow \frac{v_{max}}{v_{min}} = \frac{r_{max}}{r_{min}} = 4 \,. \tag{3}$$

   Alltså fås

$$\frac{T_{max}}{T_{min}} = \left(\frac{v_{max}}{v_{min}}\right)^2 = 16 \,. \tag{4}$$

4. Se avsnitt 12.2 i boken!

5. Lösningen för svagt dämpad harmonisk svängning kan skrivas

$$x(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} \,, \tag{5}$$

   där

$$\lambda_1 = (-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2})\omega_n \,, \quad \lambda_2 = (-\zeta - i\sqrt{1 - \zeta^2})\omega_n \,. \tag{6}$$

   Begynnelsevillkoren $x(0) = 0$ och $\dot{x}(0) = v_0$ ger

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -A \,, \tag{7}$$

$$(\lambda_1 A + \lambda_2 B) = v_0 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) A = v_0 \Rightarrow A = \frac{-i v_0}{2\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \,. \tag{8}$$

   Slutligen fås

$$x(t) = \frac{-i v_0}{2\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) = \frac{-i v_0 e^{-\zeta \omega_n t}}{2\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} 2i \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}\, t) = \tag{9}$$

$$= \frac{v_0 e^{-\zeta \omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}\, t) \tag{10}$$