Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1633, Differentialekvationer I
Tentamen, måndagen den 1 juni 2015. Lösningsförslag.

Del I

Moduluppgift 1. En tank innehåller 100 liter saltlösning med koncentrationen 8 gram salt per liter. En ny lösning med koncentrationen 3 gram salt per liter pumpas in i tanken med hastigheten 2 liter per sekund. Samtidigt pumpas ut välblandade lösningen från tanken med samma hastigheten 2 l/sek.

(a) Bestäm ekvation som uttrycker massa av salt som funktion av tiden. Lös den erhållna ekvationen.

(b) Bestäm den tidsmoment då koncentrationen av salt halveras.

(c) Förklara varför koncentrationen av salt stabiliseras efter tillräckligt lång tid. Vad är stabiliserade koncentrationen?

Lösning.

(a) Observera att volymen av saltlösningen i tanken inte ändras med tiden eftersom vätskan pumpas in med samma hastighet som den pumpas ut. Låt $A(t)$ vara massan av salt i tanken vid tid t. Koncentrationen av salt i tanken vid tid t uttrycks som $k(t) = A(t)/100$. Vi har givet att koncentrationen av salt i början var 8 gram salt per liter. Det innebär att $A(0) = 100l \cdot 8g/l = 800g$.

Derivatan $\frac{dA}{dt}$ visar hur massan av salt ändras varje sekund. Vi har

$$\frac{dA}{dt} = A_{in} - A_{ut},$$

där A_{in} är massan av salt som pumpas in varje sekund, och A_{ut} är den som pumpas ut. Vi har givet att $A_{in} = 3g/l \cdot 2l/s = 6g/s$.

$A_{ut} = k(t) \cdot 2g/s$ där $k(t)$ är koncentrationen av salt i tanken. Enligt ovanstående, $A_{ut} = A(t)/100 \cdot 2g/s = A(t)/50g/s$.

Vi får differentialekvationen

$$\frac{dA}{dt} = 6 - A(t)/50 = \frac{300 - A(t)}{50}.$$

Denna ekvation är separabel. För $A(t) \neq 300$ kan vi skriva

$$\int \frac{dA}{300 - A} = \frac{1}{50} \int dt \Leftrightarrow -\ln|300 - A| = \frac{1}{50}t + C_1.$$

Eftersom vi är intresserade av den lösningen som uppfyller $A(0) = 800$, dvs $A(0) > 300$, så studerar vi intervallet $A(t) > 300$. Här har vi $|300 - A(t)| = A - 300$, och lösningen har form

$$-\ln(A - 300) = \frac{1}{50}t + C_1 \Leftrightarrow A(t) = 300 + Ce^{-\frac{t}{50}}$$

för en godtycklig konstant C. Observera att denna lösning uppfyller $A(t) > 300$ för alla $t > 0$.

Begynnelsevärdet $A(0) = 800$ definierar konstanten:

$$800 = A(0) = 300 + C \Leftrightarrow C = 500.$$

Alltså, lösningen till begynnelsevärdesproblemet ovan är $A(t) = 300 + 500e^{-\frac{t}{50}}$.

(b) Vi söker tidpunkten t_1 sådan att $A(t_1) = \frac{1}{2}A(t_0) = 400$.

$$300 + 500e^{-\frac{t_1}{50}} = 400 \Leftrightarrow e^{-\frac{t_1}{50}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow t_1 = 50 \ln 5.$$

(c) Efter en lång tid kommer koncentrationen av salt i tanken närma sig koncentrationen av salt i den inkommande lösningen. Denna är 3g/lit. Denna observation sammanfaller med beräkningarna ovan. Mängden salt i tanken konvergerar mot 300g. :

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty} A(t) = 300 + 500e^{-\frac{t}{50}} = 300;$$

Koncentrationen av salt konvergerar allrså mot $300g./100l. = 3g/l.$

Moduluppgift 2. (a) Förklara hur fungerar reduktion av ordnings metod för att lösa andra ordningens ekvation

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x).$$

(b) Funktionen $y = x^2$ löser ekvationen $x^2y'' - \frac{1}{2}xy' - y = 0$. Bestäm allmänna lösningen av den inhomogena ekvationen

$$x^2y'' - \frac{1}{2}xy' - y = \frac{1}{x}$$

m h av metoden av reduktion av ordning.

(c) Bestäm även den lösning till inhomogena ekvationen i fråga (b) som uppfyller villkor

$$y(1) = 1; \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$

Lösning

(a) Se boken Zill, Wright 8th ed.(Kap.4.2)

(b) För $x \neq 0$ skrivs om ekvationen på standard form:

$$y'' - \frac{1}{2x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^3}$$

Låt $y_1(x) = x^2$ vara den givna lösningen till den motsvarande homogena ekvationen. Vi söker en annan (linjärt oberoende) lösning på formen $y(x) = y_1(x)u(x)$, där $u(x) \neq const$. Vi har: $y' = y_1'u + y_1u'$, $y'' = y_1''u + 2y_1'u' + y_1u''$. Insättningen i ekvationen ger:

$$(y_1''u + 2y_1'u' + y_1u'') - \frac{1}{2x}(y_1'u + y_1u') - \frac{1}{x^2}y_1u = \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow$$
$$u(y_1'' - \frac{1}{2x}y_1' - \frac{1}{x^2}y_1) + u'(2y_1' - \frac{1}{2x}y_1) + y_1u'' = \frac{1}{x^3}.$$

Funktionen som multipliceras med u i den sista ekvationen är lika med 0 eftersom y_1 är en lösning till den homogena ekvationen. Ekvationen ovan är darför ekvivalent med

$$u'(2y_1' - \frac{1}{2x}y_1) + y_1u'' = \frac{1}{x^3}.$$

Insättning av $y_1 = x^2$ ger $x^2u'' + \frac{7}{2}xu' = \frac{1}{x^3}$. Om man betecknar $u'(x)$ för $w(x)$, får vi en första ordningens linjär ekvation för w:

$$x^2w'(x) + \frac{7}{2}xw(x) = \frac{1}{x^3}.$$

För $x \neq 0$ skriver vi om ekvationen på standard form:

$$w'(x) + \frac{7}{2x}w(x) = \frac{1}{x^5}.$$

För $x > 0$ är en integrerande faktor $x^{7/2}$. Multiplicera ekvationen med den integrerande faktorn:

$$(x^{7/2}w)' = x^{-3/2} \Leftrightarrow x^{7/2}w = -2x^{-1/2} + C \Leftrightarrow w = -2x^{-4} + Cx^{-7/2}.$$

Eftersom $u' = w$, så får vi $u = \frac{2}{3}x^{-3} + C_1x^{-5/2} + C_2$. Slutligen,

$$y(x) = x^2u(x) = \frac{2}{3}x^{-1} + C_1x^{-1/2} + C_2x^2$$

(c) Villkoret $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ ger $C_2 = 0$.

Villkoret $y(1) = 1$ ger $\frac{2}{3} + C_1 + C_2 = 1 \Leftrightarrow C_1 = \frac{1}{3}$.

Villkorna ovan definierar alltså lösningen

$$y(x) = x^2u(x) = \frac{2}{3}x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-1/2}$$

Moduluppgift 3. Undersök integralekvation

$$y(t) = 8\int_0^t y(s)\cos 5(t-s)\,ds + 3\sin 5t$$

m h av Laplacetransform.

(a) Visa att integralen i högerledet är en faltning av två funktioner. Vad är funktionerna som faltas?

(b) Bestäm Laplacetransform $Y(s)$ av lösningen $y(t)$.

(c) Bestäm lösningen $y(t)$.

Lösning

(a) Faltning av två funktioner, $f(t)$ och $g(t)$ är funktionen

$$f * g(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds.$$

I vårt fall $\int_0^t y(s)\cos 5(t-s)\,ds = y(t) * \cos 5t$.

(b) Beteckna $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$ och Laplace-transformera ekvationen:

$$Y(s) = 8Y(s)\frac{s}{s^2+5^2} + 3\frac{5}{s^2+5^2} \Leftrightarrow Y(s)\left(1 - 8\frac{s}{s^2+5^2}\right) = \frac{15}{s^2+5^2}$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{15}{s^2-8s+25}.$$

(c) $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{15}{s^2-8s+25}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{15}{(s-4)^2+9}\right) = e^{4t}5\sin 3t$.

Den sista likheten följer från satsen: $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a)$.

(3p) **4.** (a) Lös differentialekvationen

$$y' = \frac{y^2 + xy - x^2}{xy + x^2}, \quad x > 0.$$

Ledning: observera att högerledet är en homogen funktion av x, y och använd substitution $y = xu(x)$.

(1p) (b) Bestäm även den lösning som uppfyller begynnelsevillkor $y(1) = -2$.

Lösning.

(a) Vi använder substitution $y(x) = xu(x)$. Vi får $y'(x) = xu'(x) + u(x)$ och högerledet av ekvationen blir

$$\frac{u^2 + u - 1}{u + 1}.$$

Hela ekvationen blir då

$$xu' = -\frac{1}{u + 1}.$$

Det är en separabel ekvation. Vi får

$$(u + 1)\, du = -\frac{dx}{x}$$

och integreringen ger oss

$$\frac{u^2}{2} + u = -\ln x + C$$

varav

$$u(x) = -1 \pm \sqrt{D - 2\ln x},$$

där $D = 2C + 1$ är en ny constant. Vi får

$$y(x) = -x \pm x\sqrt{D - 2\ln x}.$$

(b) Insättning av begynnelsevillkor $y(1) = -2$ till lösningen ger oss

$$-2 = -1 \pm \sqrt{D}.$$

Den här ekvationen kan uppfyllas om man väljer minustecknet framför roten och $D = 1$. Vi får lösningen

$$y(x) = -x - x\sqrt{1 - 2\ln x}.$$

5. Klassificiera med avseende på stabilitet de kritiska punkterna till ett plant autonomt system svarande mot den icke-linjära differentialekvationen

$$u'' - (u - 3)u' + u^2 - 4 = 0.$$

Ange även typ av fasporträtt av systemet nära varje kritisk punkt (du behöver inte rita någon bild!)

Lösning.

Vi inför en ny obekant funktion $v = u'$. Ekvationen ersättes nu med systemet

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = (u-3)v - u^2 + 4. \end{cases}$$

Kritiska punkter till det är lösningar av ett system av ekvationer

$$\begin{cases} v = 0 \\ -u^2 + 4 = 0. \end{cases}$$

Vi får två kritiska punkter $(2,0)$ samt $(-2,0)$. För att undersöka dem använder vi metoden av linearisering. Vi bestämmer Jakobimatris av systemets högerled:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v-2u & u-3 \end{pmatrix}.$$

I punkten $(2,0)$ får vi

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matrisen har komplexa egenvärdena $\lambda_{1,2} = -1/2 \pm i\sqrt{15/4}$ som har negativ reeldel. Detta visar att den kritiska punkten $(2,0)$ är en stabil spiral.

I pukten $(-2,0)$ får vi

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Matrisen har egenvärdena $\lambda_{1,2} = -5/2 \pm \sqrt{41/4}$. De är reella av olika tecken vilket visar att den kritiska punkten $(-2,0)$ är en sadel och den är instabil.

(2p) **6.** (a) Uttryck funktionen

$$f(t) = \begin{cases} 3, \ 0 \le t < 2; \\ -2, \ 2 \le t < 4; \\ 0, \ 4 \le t \end{cases}$$

som kombination av Heavisides stegfunktioner $U(t-a)$ (exakta värdena i punkter $t = 0,\ 2,\ 4$ kan försummas). Bestäm därefter Laplacetransform $F(s)$ av $f(t)$.

(2p) (b) Använd beräkningar från (a) för att lösa begynnelsevärdesproblem

$$y' - y = f(t); \quad y(0) = 2.$$

Här är $f(t)$ samma som i fråga (a).

Lösning.

(a) Från egenskaper av Heavisides stegfunktion ser man att funktionen

$$3(U(t) - U(t-2))$$

antar värdet 3 på intervallet $(0,2)$ och värdet 0 utanför det slutna intervallet $[0,2]$. Analogt, antar funktionen $-2(U(t-2) - U(t-4))$ värdet -2 på intervallet $(2,4)$ och värdet 0 utanför intervallet $[2,4]$. Summan av dessa två funktioner ger oss värdena som krävs i uppgiften d v s

$$f(t) = 3(U(t) - U(t-2)) - 2(U(t-2) - U(t-4)) = 3U(t) - 5U(t-2) + 2U(t-4).$$

Laplacetransform av detta uttryck är

$$F(s) = \frac{3 - 5e^{-2s} + 2e^{-4s}}{s}.$$

(b) Vi tillämpar Laplacetransform till hela differentialekvationen. Vi får då

$$sY(s) - 2 - Y(s) = \frac{3 - 5e^{-2s} + 2e^{-4s}}{s}$$

varav

$$Y(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{3 - 5e^{-2s} + 2e^{-4s}}{s(s-1)}.$$

För att bestämma invers Laplacetransform skall man använda partiellbråkuppdelning:

$$\frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}.$$

Vi får

$$Y(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{3 - 5e^{-2s} + 2e^{-4s}}{s-1} + \frac{-3 + 5e^{-2s} - 2e^{-4s}}{s}.$$

Invers Laplacetransform ger oss svar

$$y(t) = 2e^t + (3e^t - 5e^{t-2}U(t-2) + 2e^{t-4}U(t-4)) + (-3U(t) + 5U(t-2) - 2U(t-4)).$$

7. Ett linjärt system $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$ har lösningar

$$\mathbf{Y}_1(t) = \begin{pmatrix} (2+3t)e^t \\ (2t-3)e^t \end{pmatrix}; \ \mathbf{Y}_2(t) = \begin{pmatrix} (2-3t)e^t \\ (2t+3)e^t \end{pmatrix}; \ \mathbf{Y}_3(t) = \begin{pmatrix} (4-3t)e^t \\ (4t+3)e^t \end{pmatrix}.$$

(1p) (a) Bestäm något fundamentalsystem av lösningar;

(1p) (b) Ange en fundamentalmatris av systemet;

(2p) (c) Lös inhomogena systemet $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} + \mathbf{G}$, där

$$G(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}.$$

Lösning. (a) Systemet av differentialekvationer i frågan är ett linjärt homogent system av ordning 2. Enligt teori har ett sådant system ett fundamentalsystem av lösningar som består av två linjärt oberoende lösningar. T ex får man välja några två av tre givna lösningar och visa att de är linjärt oberoende. Alternativt, får man betrakta linjära kombinationer av givna lösningar för att få lättare uttryck att arbeta med. Vi tar funktioner

$$\mathbf{Y}_4(t) = \frac{1}{6}(\mathbf{Y}_1(t) - \mathbf{Y}_2(t)) = \begin{pmatrix} te^t \\ -e^t \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{Y}_5(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{Y}_3(t) - \mathbf{Y}_2(t)) = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix}.$$

För att visa att de är linjärt oberoende räknar man Wronski determinant:

$$W = \begin{vmatrix} te^t & e^t \\ -e^t & te^t \end{vmatrix} = (t^2+1)e^{2t}.$$

Den är nollskild vilket visar att funktionerna $\mathbf{Y}_4(t)$ och $\mathbf{Y}_5(t)$ är linjärt oberoende.

(b) Lösningarna $\mathbf{Y}_4(t)$ och $\mathbf{Y}_5(t)$ erhållna i (a) bildar en fundamentalmatris

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} te^t & e^t \\ -e^t & te^t \end{pmatrix}.$$

(c) Vi söker lösningen till inhomogena systemet i form $\mathbf{Y}(t) = \Phi(t)\mathbf{U}(t)$, där $\mathbf{U}(t)$ är en ny obekant funktion. Systemet blir

$$\Phi'(t)\mathbf{U}(t) + \Phi(t)\mathbf{U}'(t) = A\Phi(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{G}(T).$$

P g av standarda egenskaper av fundamentalmatriser får vi $\Phi' = A\Phi$ vilket ger oss systemet $\Phi\mathbf{U}' = \mathbf{G}$ eller $\mathbf{U}' = \Phi^{-1}\mathbf{G}$. Vi får

$$\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{e^{2t}(t^2+1)} \begin{pmatrix} te^t & -e^t \\ e^t & te^t \end{pmatrix}.$$

Vi räknar ut

$$\Phi^{-1}(t)\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t-2}{t^2+1} \\ \frac{1+2t}{t^2+1} \end{pmatrix}.$$

Det är $\mathbf{U}'$. Integreringen ger oss

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 2\arctan t \\ \arctan t + \ln(t^2+1) \end{pmatrix} + \mathbf{C},$$

där $\mathbf{C}$ är en godtycklig konstant vektor.

Lösningen blir $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}_h(t) + \mathbf{Y}_p(t)$, där

$$Y_h(t) = \Phi(t)\mathbf{C} = C_1 \begin{pmatrix} te^t \\ -e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix}$$

är den homogena lösningen och

$$\mathbf{Y}_p(t) = \begin{pmatrix} te^t & e^t \\ -e^t & te^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 2\arctan t \\ \arctan t + \ln(t^2+1) \end{pmatrix}$$

är partikulärlösning.

8. Bestäm 2π-periodiska funktionen $y(t)$ som uppfyller $y'(t) + y(t+\pi) = \cos t$. Ledning: använd lämpliga Fourierserier!

Lösning. Eftersom funktionen $y(t)$ är 2π-periodisk, kan den sökas i form av Fourierserien

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right).$$

Vi får då

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos(nt) - na_n \sin(nt).$$

Eftersom $\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x$ och likadant gäller för sin får vi

$$y(t+\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n a_n \cos(nt) + (-1)^n b_n \sin(nt)\right).$$

Hela ekvationen blir

$$\cos t = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(((-1)^n a_n + n b_n) \cos(nt) + ((-1)^n b_n - n a_n) \sin(nt) \big),$$

där vänsterledet $\cos t$ tolkas också som Fourierserien med den enda nollskild koefficient $a_1 = 1$ och alla övriga koefficienter nollor.

Jämförelse av koefficienter för $n = 0$ ger oss $a_0 = 0$. Jämförelse av koefficienter för $n = 1$ ger oss systemet

$$-a_1 + b_1 = 1; \qquad -b_1 - a_1 = 0,$$

varav vi hittar $a_1 = -1/2$ och $b_1 = 1/2$. Till slut, jämförelse av koefficienter för varje $n \geq 2$ ger oss systemet

$$(-1)^n a_n + n b_n = 0; \qquad -n a_n + (-1)^n b_n = 0$$

med obekanta a_n, b_n. Det är ett homogent linjärt system vars determinant är $1 + n^2 \neq 0$ vilket ger oss att $a_n = 0$ och $b_n = 0$ för $n \geq 2$.

Svar: $y(t) = -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t$.