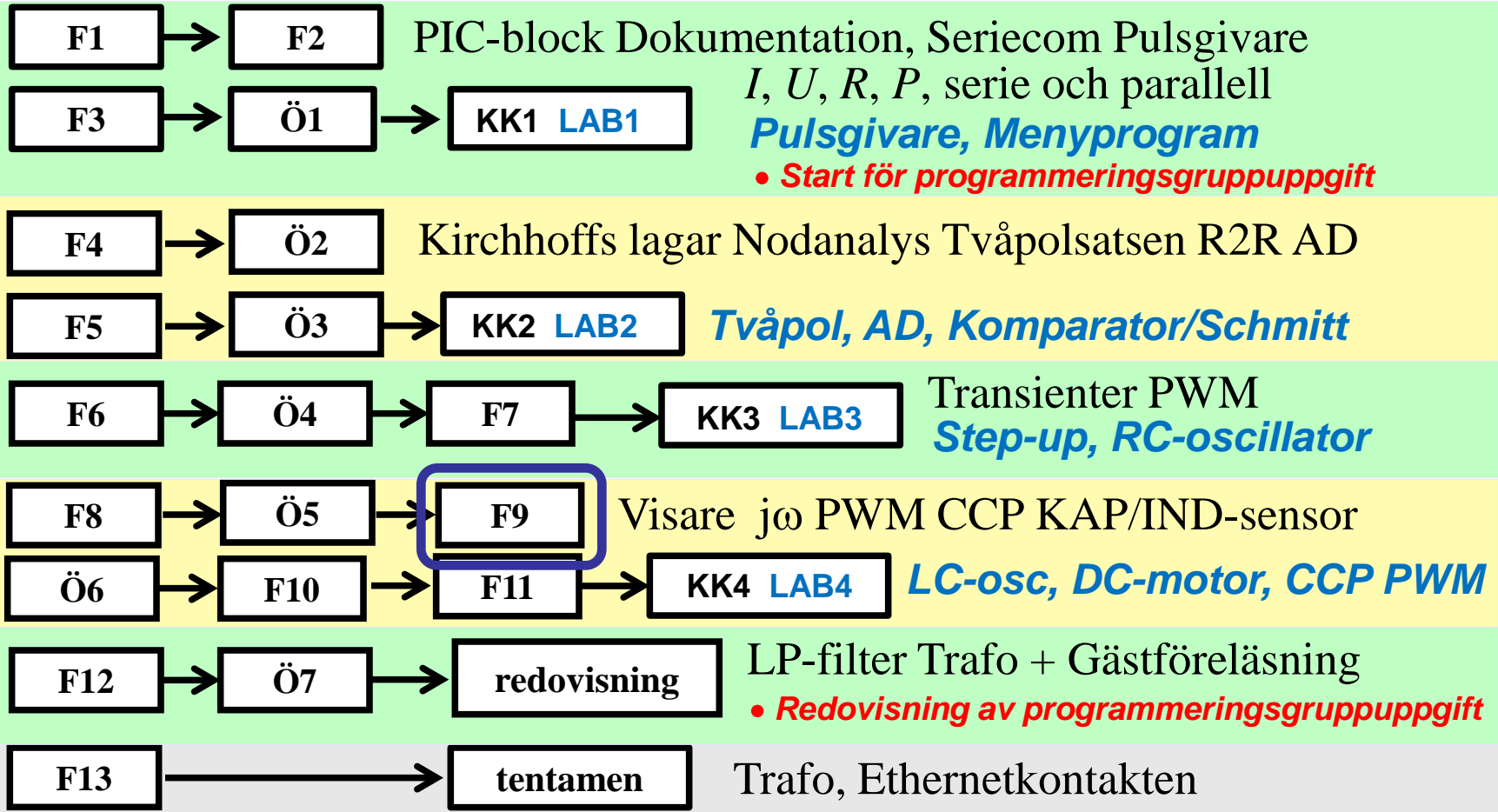
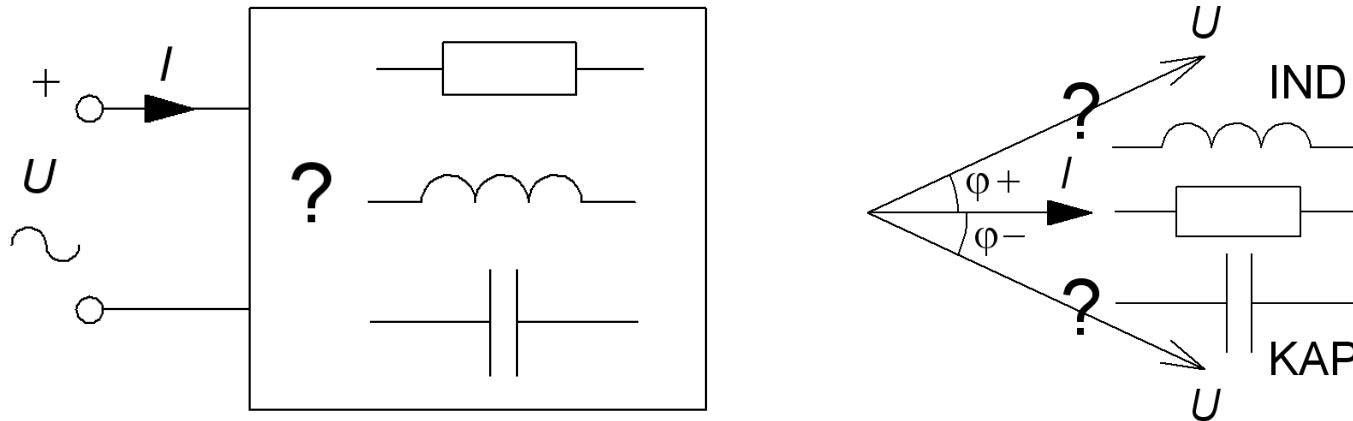


# IE1206 Inbyggd Elektronik



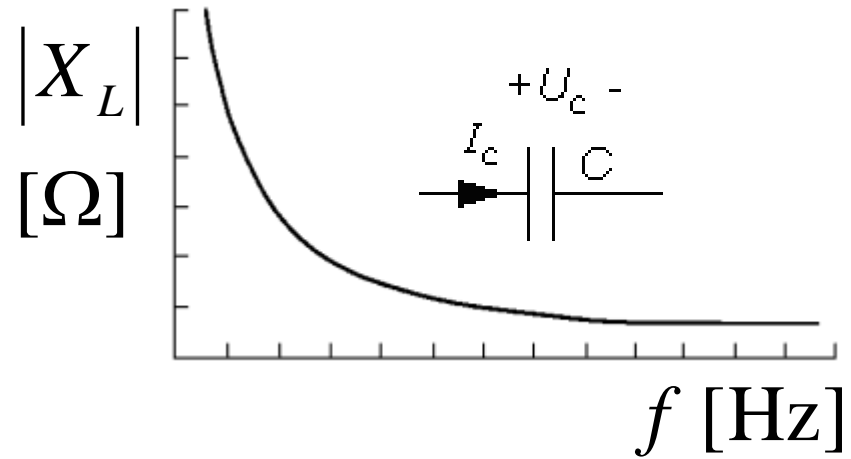
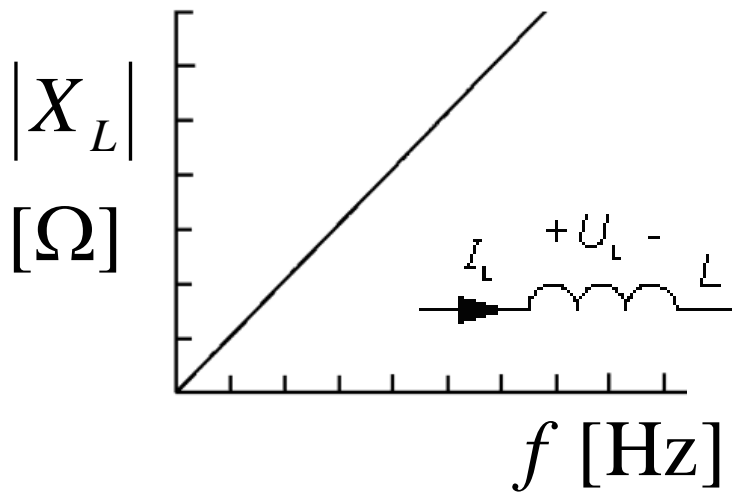
# R L C



En impedans som innehåller spolar och kondensatorer har, beroende på frekvensen, antingen induktiv karaktär **IND**, eller kapacitiv karaktär **KAP**.

Ett viktigt *specialfall* uppstår vid den frekvens då kapacitanserna och induktanserna är jämstarka, och deras effekter tar ut varandra. Impedansen blir då rent resistiv. Fenomenet kallas för **resonans** och den frekvens då detta uppträder är **resonansfrekvensen**.

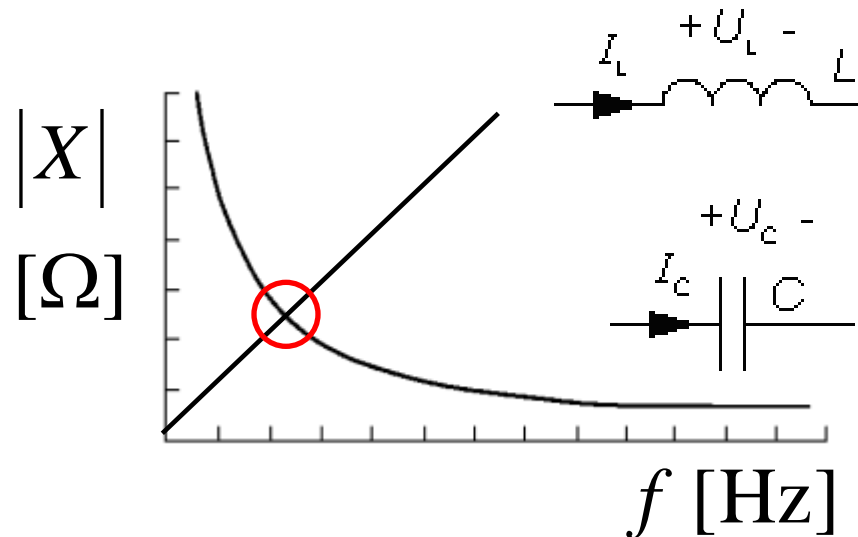
# Reaktansens frekvensberoende



$$|X_L| = \omega \cdot L \quad |X_C| = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$\omega = 2\pi f$$

# $R L C$ impedanser



- Vid en viss vinkelfrekvens har  $X_L$  och  $X_C$  samma belopp.

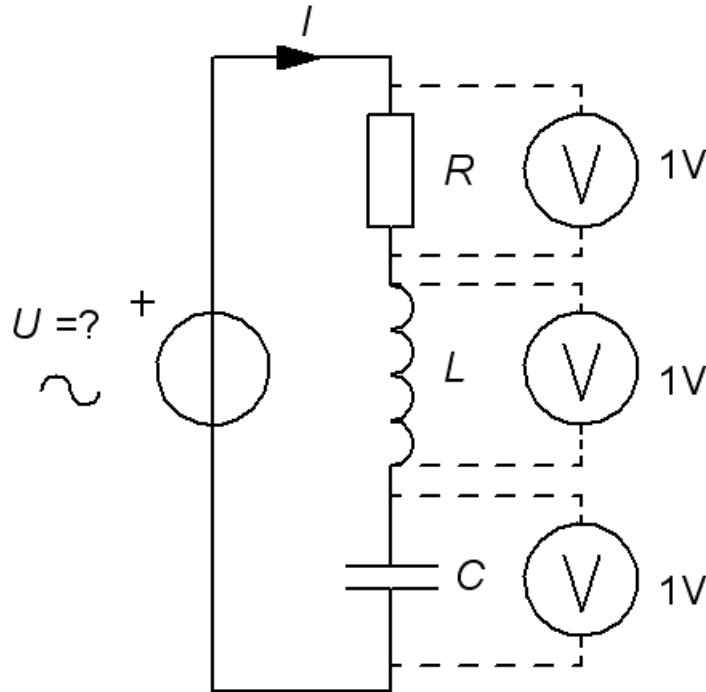
$$|X_L| = \omega \cdot L \quad |X_C| = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$\omega = 2\pi f$$

William Sandqvist [william@kth.se](mailto:william@kth.se)

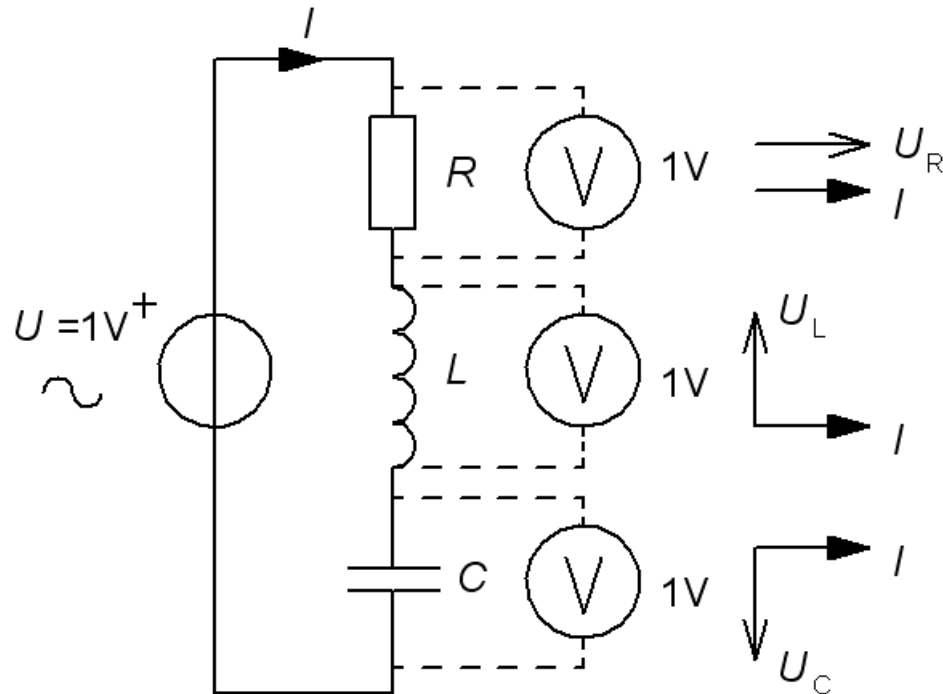
# Hur stor är $U$ ? (13.1)

De tre voltmetrarna visar samma, 1V, hur stor är då den matande växel-spänningen  $U$ ? ( *Varning, kuggfråga* )



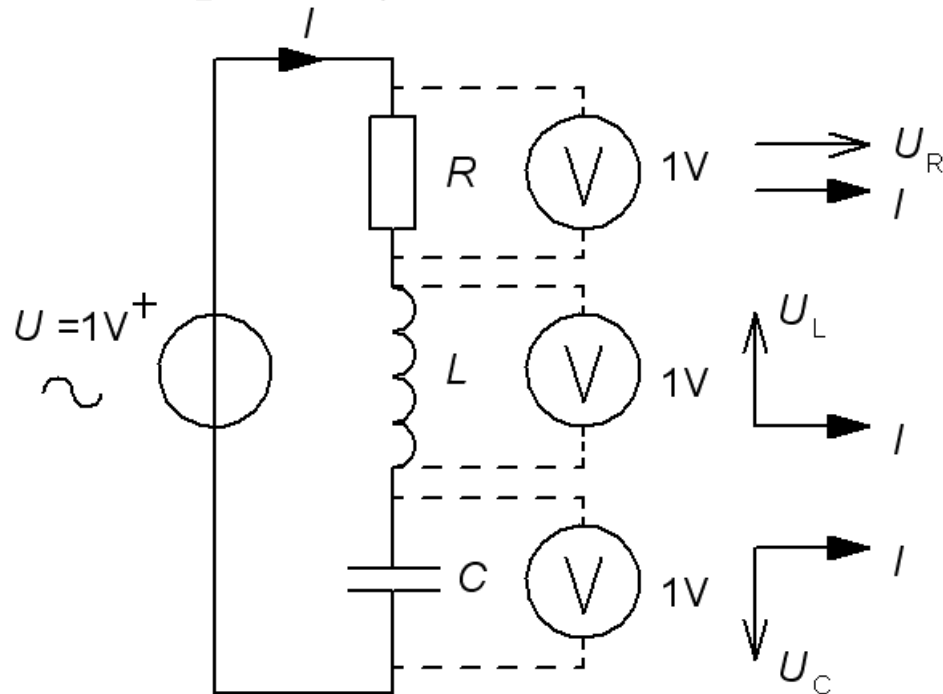
# Hur stor är $U$ ? (13.1)

De tre voltmetrarna visar samma, 1V, hur stor är då den matande växel-spänningen  $U$ ? ( *Varning, kuggfråga* )



# Hur stor är $U$ ? (13.1)

De tre voltmetrarna visar samma, 1V, hur stor är då den matande växel-spänningen  $U$ ? (*Varning, kuggfråga*)



Eftersom voltmetrarna visar ”*samma*” och strömmen  $I$  är *gemensam* så gäller:

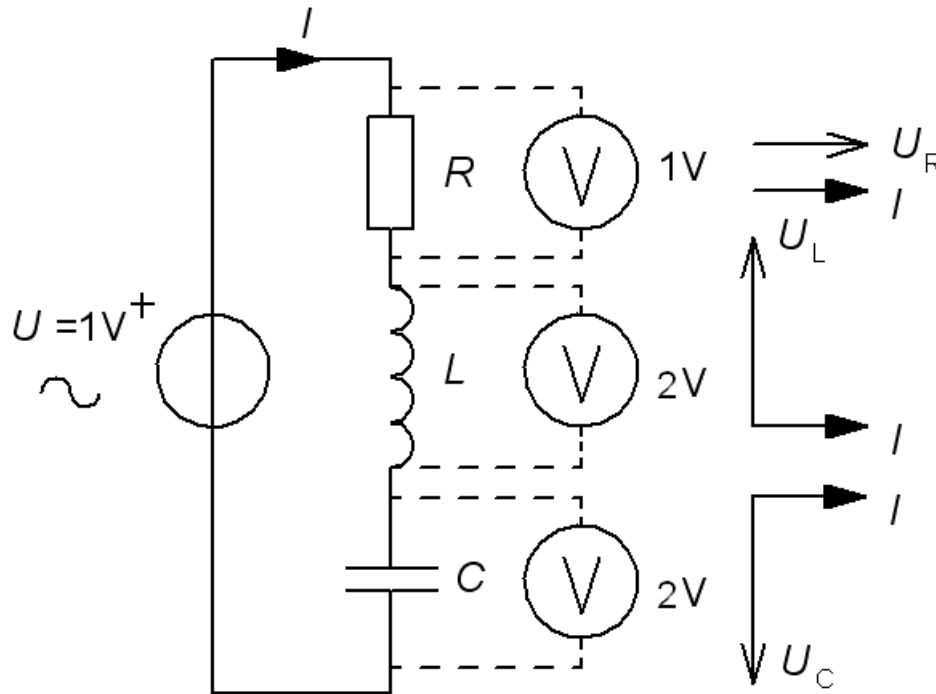
$$R = |X_L| = |X_C| \quad R = \omega L = \frac{1}{\omega C}$$



# Om $|X_L|=|X_C|=2R$ ?

Antag att växelspänningen  $U$  fortfarande är 1 V, men att reaktanserna är *dubbelt* så stora. Vad visar voltmetrarna?

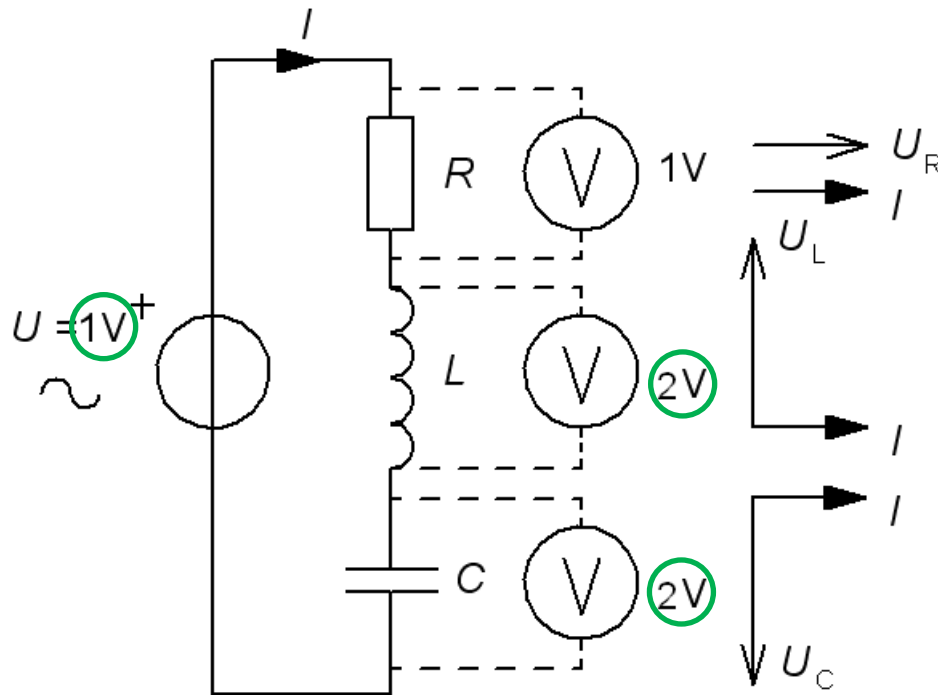
$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = 2 \cdot R$$



# Om $|X_L|=|X_C|=2R$ ?

Antag att växelspänningen  $U$  fortfarande är 1 V, men att reaktanserna är *dubbelt* så stora. Vad visar voltmetrarna?

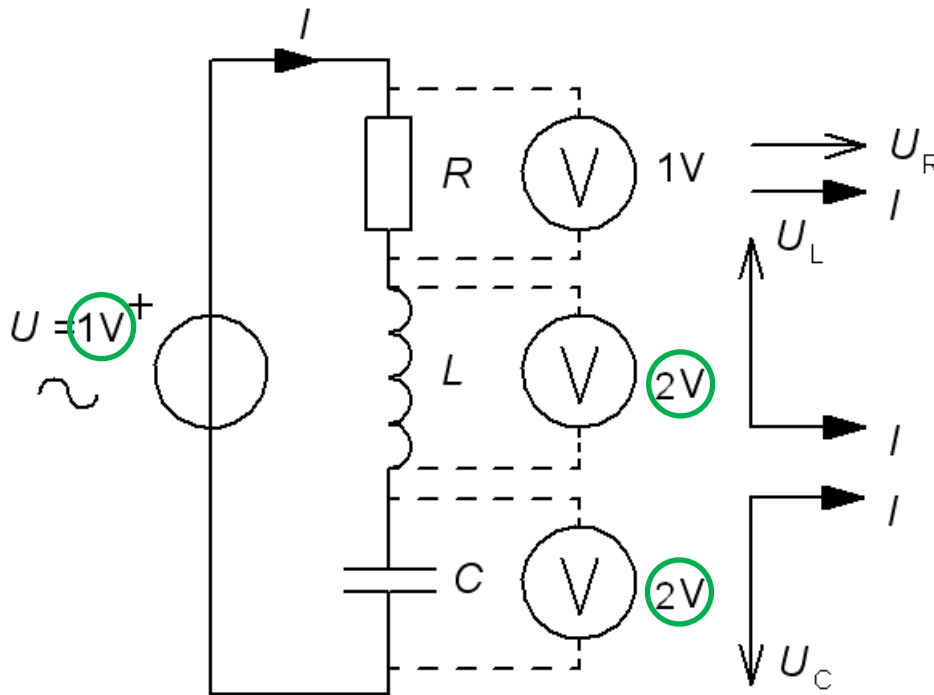
$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = 2 \cdot R$$



# Om $|X_L|=|X_C|=2R$ ?

Antag att växelspänningen  $U$  fortfarande är 1 V, men att reaktanserna är *dubbelt* så stora. Vad visar voltmetrarna?

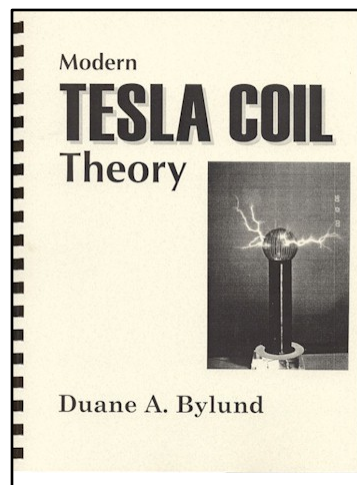
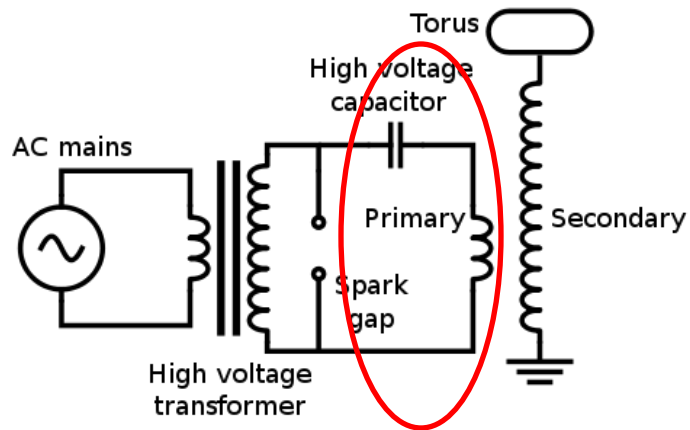
$$\omega L = \frac{1}{\omega C} = 2 \cdot R$$



*Vid resonans kan spänningarna över reaktanserna vara många gånger **högre** än den matande växelspänningen.*

# Tesla coil

Många bygger "Tesla"-spolar för att skaffa sig lite spänning i livet ...



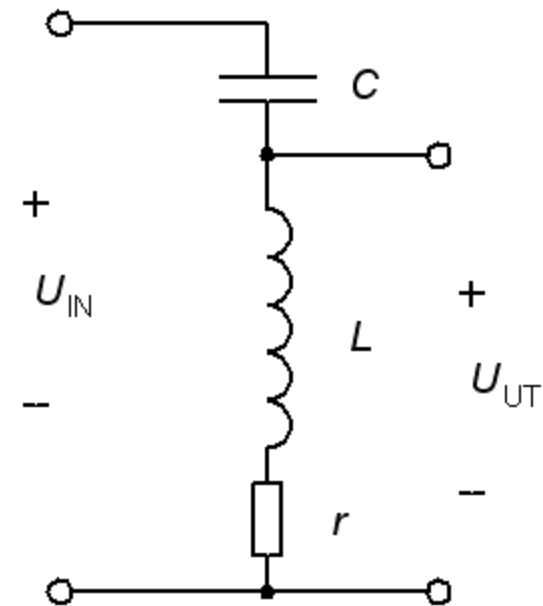
William Sandqvist [william@kth.se](mailto:william@kth.se)

# Spolens godhetstal $Q$

Oftast är det den inre resistansen i spolen som är resistorn i RLC-kretsen. Ju högre spolens växelströmsmotstånd  $\omega L$  är i förhållande till likströmsmotståndet  $r$ , desto större blir spänningen över spolen vid en resonans.

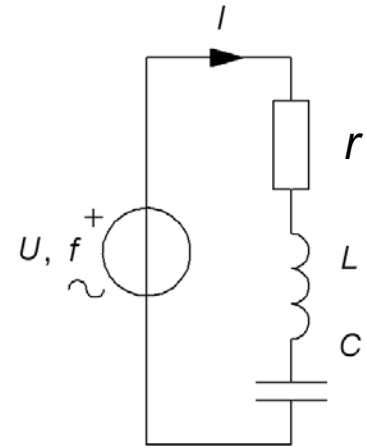
Detta förhållande kallas för spolens **godhetstal  $Q$** . ( eller  $Q$ -faktor ).

$$Q = \frac{X_L}{r} = \frac{\omega L}{r} \Rightarrow U_{UT} \approx Q \cdot U_{IN}$$



# Serieresonansen

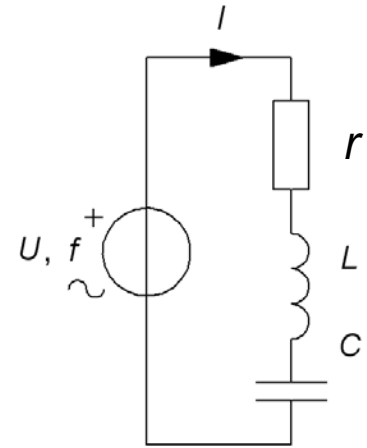
$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \left( r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \underline{I} \cdot \left( r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right)$$



# Serieresonansen

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \left( r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \underline{I} \cdot \left( r + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right)$$

Impedansen är reell när imaginärdelen är ”0”. Detta inträffar vid vinkelfrekvensen  $\omega_0$  ( frekvensen  $f_0$  ).

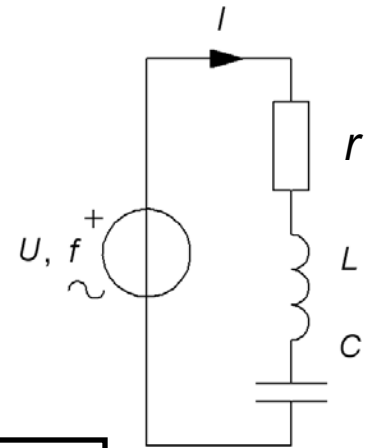


# Serieresonansen

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \left( r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \underline{I} \cdot \left( r + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) \stackrel{=0}{\text{}}$$

Impedansen är reell när imaginärdelen är "0". Detta inträffar vid vinkelfrekvensen  $\omega_0$  ( frekvensen  $f_0$  ).

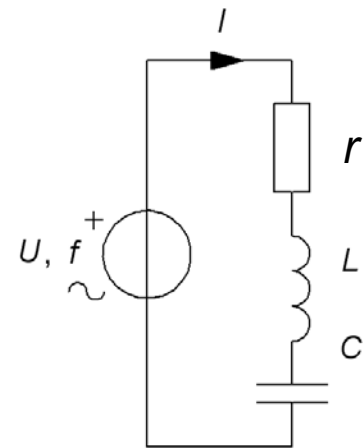
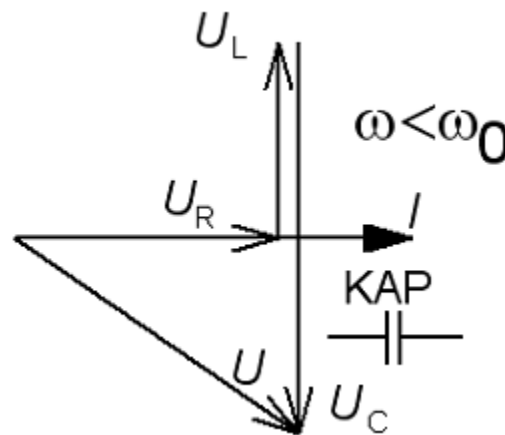
$$\text{Im}[\underline{Z}] = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$





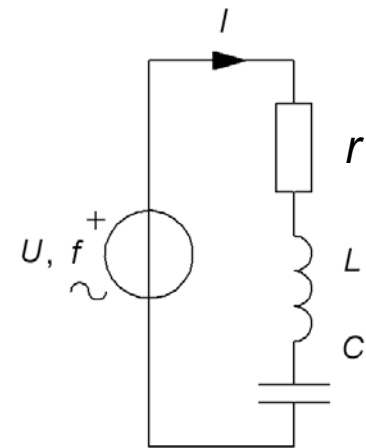
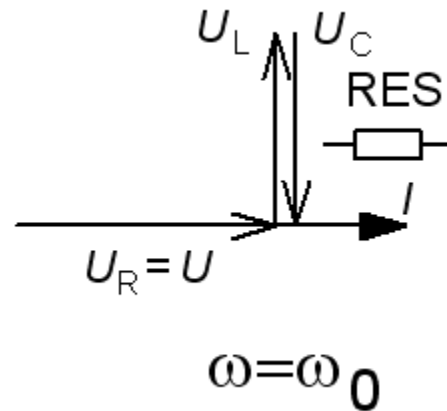
# Serieresonansens visardiagram

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \left( r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right)$$



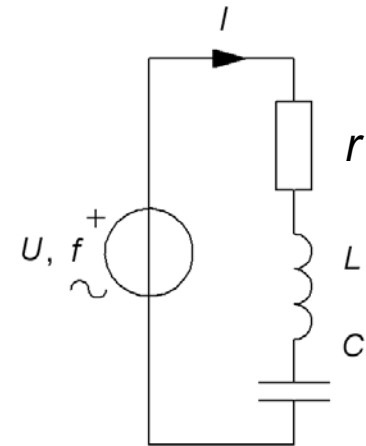
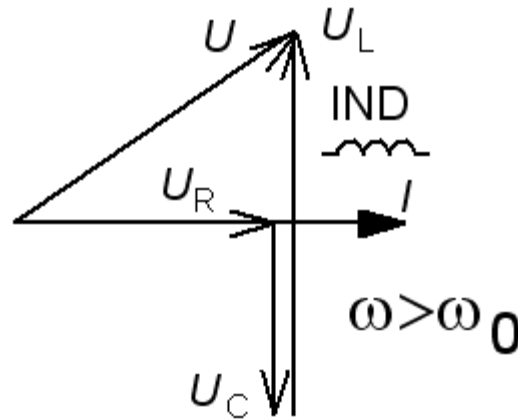
# Serieresonansens visardiagram

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \left( r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right)$$



# Serieresonansens visardiagram

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \left( r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right)$$



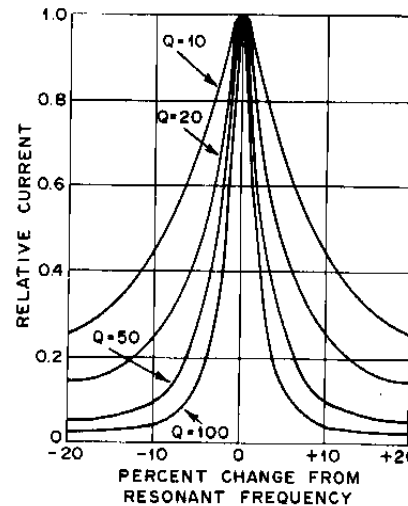
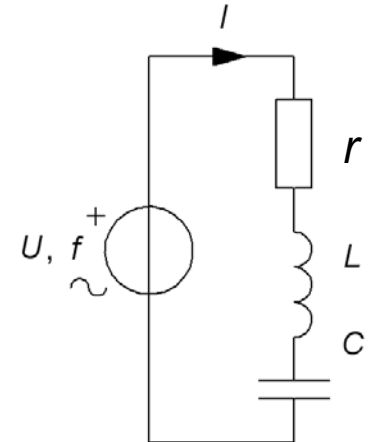
# Serieresonanskretsens Q

Det är *resistansen* i resonanskretsen, oftast spolens inre resistans, som avgör hur uttalat resonansfenomenet blir.

Man brukar ”normera” sambandet mellan de olika variablerna genom att *införa* resonansvinkelfrekvensen  $\omega_0$  tillsammans med  $Q$  och maxströmmen  $I_{\max}$  i funktionen  $I(\omega)$  :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{\omega_0 L}{r}$$

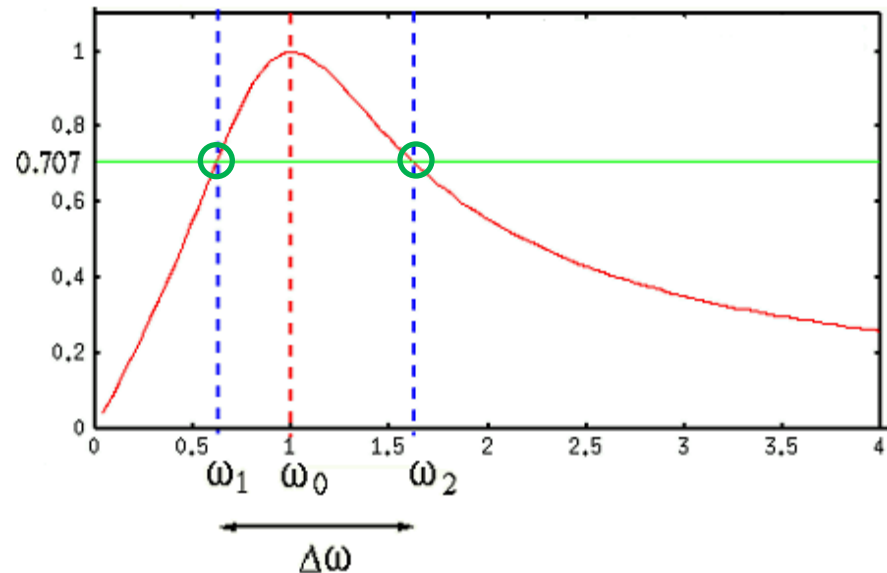
$$\underline{I} = \frac{I_{\max}}{\left( 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)}$$



*Normerat diagram för serieresonanskretsen. Ett högt Q motsvarar en smal resonansstopp.*

# Bandbredden $BW$

Vid *två* olika vinkelfrekvenser blir imaginärdel **Im** och realdel **Re** i nämnaren *lika* stora.  $I$  är då  $I_{\max}/\sqrt{2}$  ( $\approx 71\%$ ). **Bandbredden**  $BW=\Delta\omega$  är avståndet mellan dessa vinkelfrekvenser.



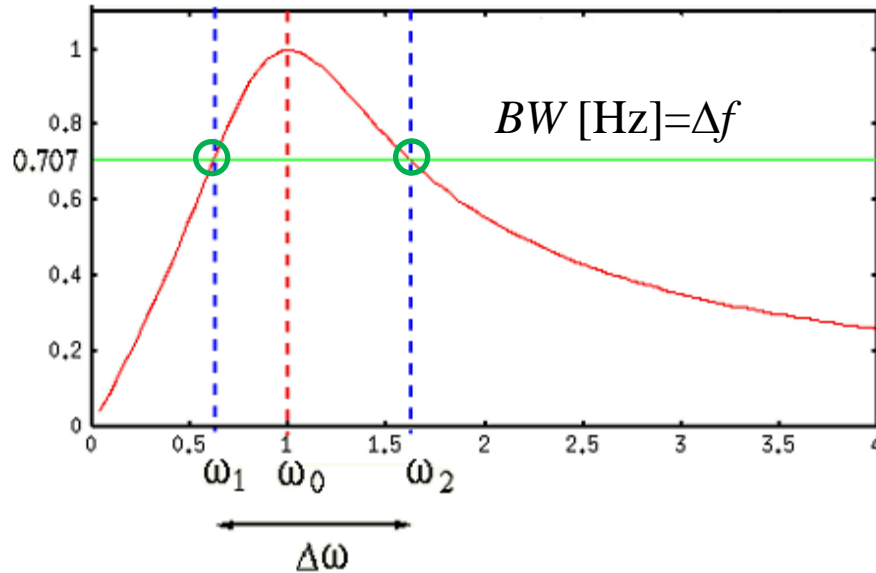
$$\underline{I} = \frac{I_{\max}}{\left( \boxed{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \right)}$$

Re = Im

*andragradsekvationer ger :*

$$BW[\text{rad/s}] = \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \quad \omega_0^2 = \omega_2 \cdot \omega_1 \quad \omega_2, \omega_1 = \omega_0 \left( \pm \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} + 1} \right)$$

# • Bekvämare formler



$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{2\pi f_0 L}{r}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{Q}$$

Om  $Q$  är högt gör man *inget större fel* om man fördelar bandbredden **lika** på båda sidor om  $f_0$ .

$$f_2, f_1 \approx f_0 \pm \frac{\Delta f}{2}$$

William Sandqvist [william@kth.se](mailto:william@kth.se)

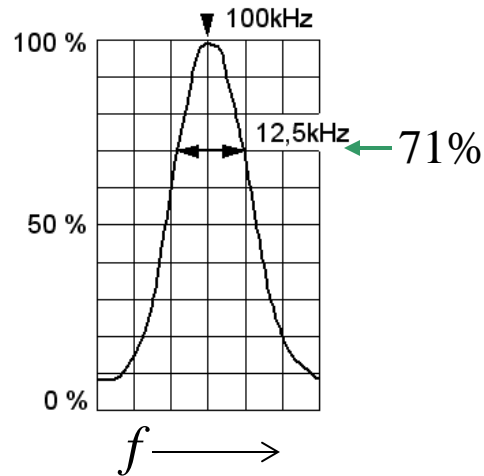
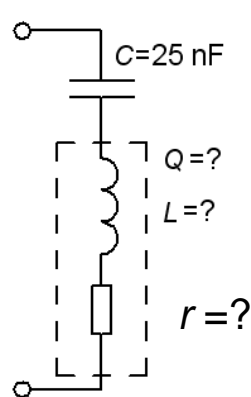
# Exempel, serieresonanskrets

$$C = 25 \text{ nF}$$

$$f_0 = 100 \text{ kHz}$$

$$BW = \Delta f = 12,5 \text{ kHz}$$

$$Q = ? \quad L = ? \quad r = ?$$





# Exempel, serieresonanskrets

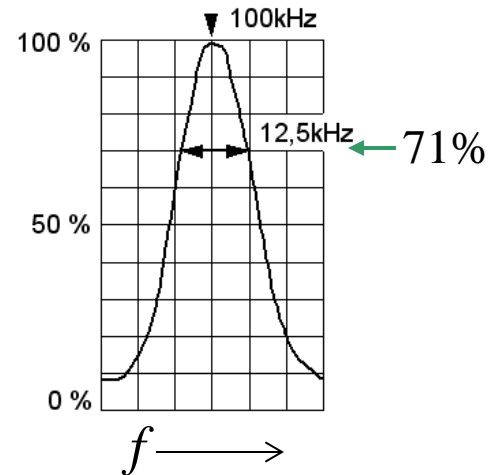
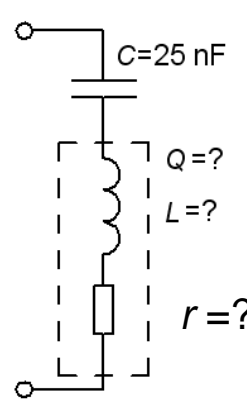
$$C = 25 \text{ nF}$$

$$f_0 = 100 \text{ kHz}$$

$$BW = \Delta f = 12,5 \text{ kHz}$$

$$Q = ? \quad L = ? \quad r = ?$$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{100}{12,5} = 8$$



# Exempel, serieresonanskrets

$$C = 25 \text{ nF}$$

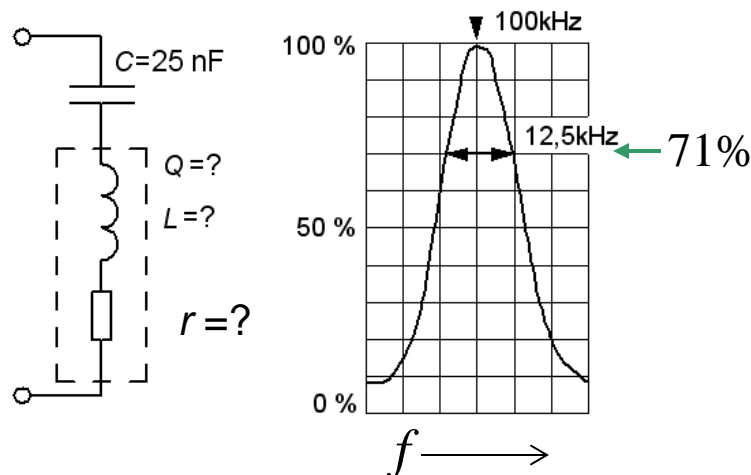
$$f_0 = 100 \text{ kHz}$$

$$BW = \Delta f = 12,5 \text{ kHz}$$

$$Q = ? \quad L = ? \quad r = ?$$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{100}{12,5} = 8$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow L = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 100 \cdot 10^3)^2 \cdot 25 \cdot 10^{-9}} = 0,1 \text{ mH}$$



# Exempel, serieresonanskrets

$$C = 25 \text{ nF}$$

$$f_0 = 100 \text{ kHz}$$

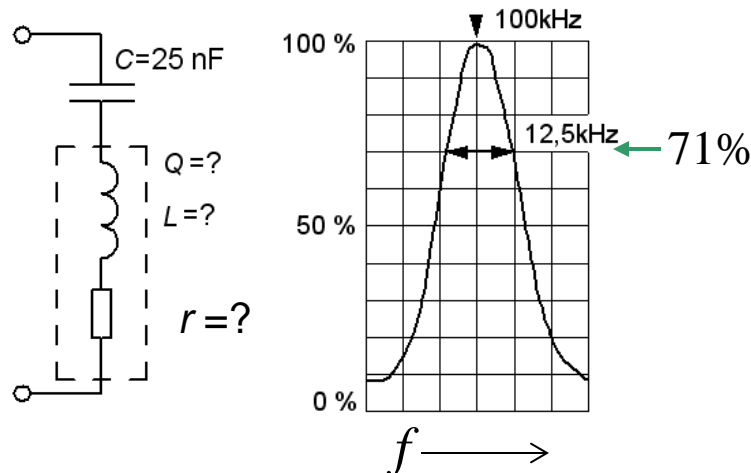
$$BW = \Delta f = 12,5 \text{ kHz}$$

$$Q = ? \quad L = ? \quad r = ?$$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{100}{12,5} = 8$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow L = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 100 \cdot 10^3)^2 \cdot 25 \cdot 10^{-9}} = 0,1 \text{ mH}$$

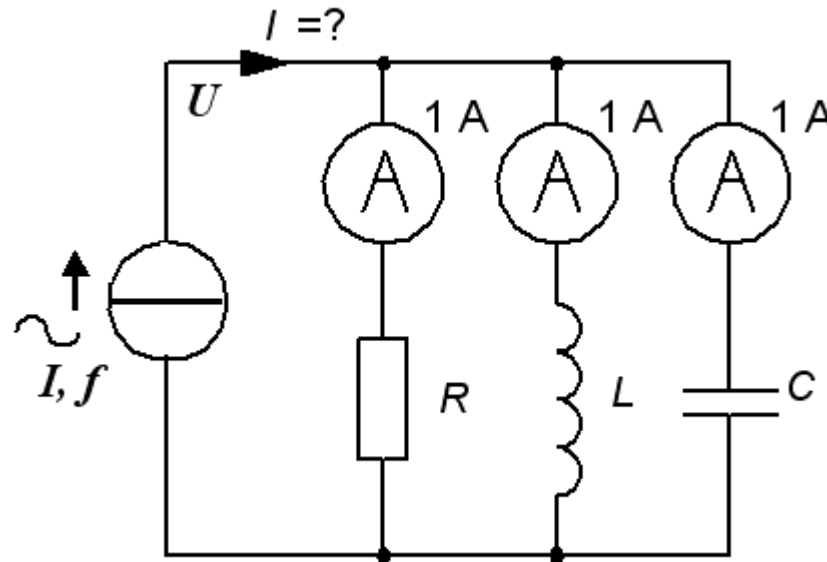
$$Q = \frac{X_L}{r} = \frac{2\pi f_0 \cdot L}{r} \Rightarrow r = \frac{2\pi f_0 \cdot L}{Q} = \frac{2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}}{8} \approx 8 \Omega$$



William Sandqvist [william@kth.se](mailto:william@kth.se)

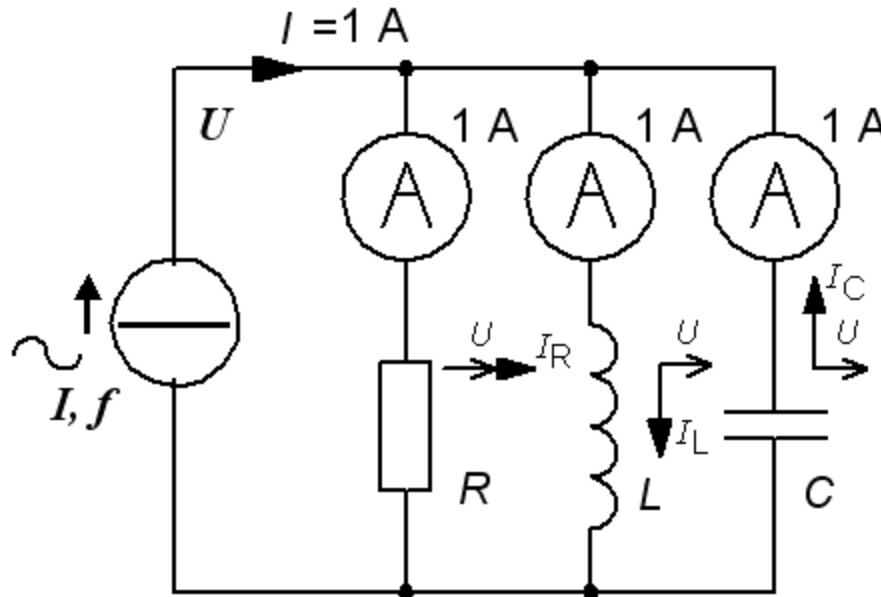
# Hur stor är $I$ ? (13.2)

De tre amperemetrarna visar samma, 1 A, hur stor är då den matande växelströmmen  $I$  ? ( *Varning, kuggfråga* )



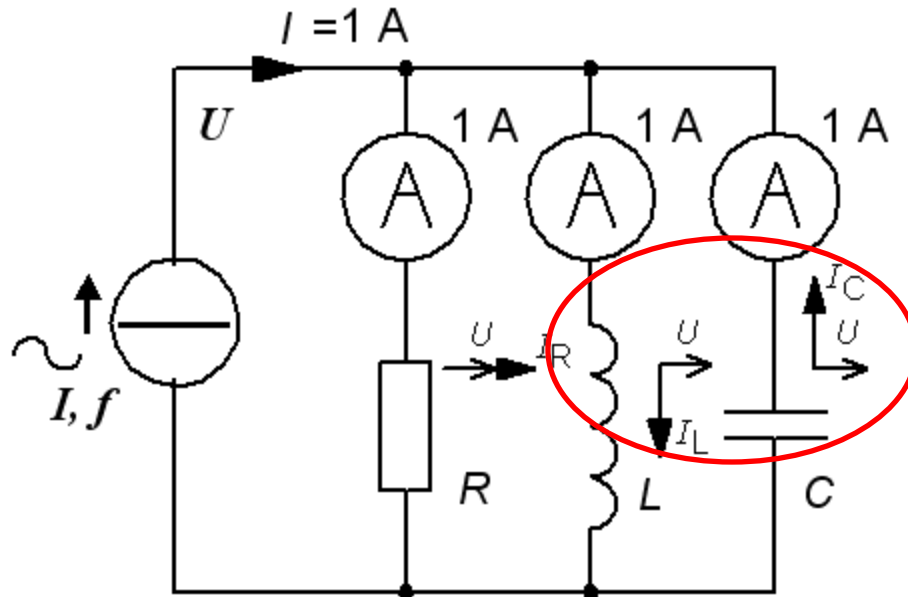
# Hur stor är $I$ ? (13.2)

De tre amperemetrarna visar samma, 1 A, hur stor är då den matande växelströmmen  $I$ ? ( *Varning, kuggfråga* )



# Hur stor är $I$ ? (13.2)

De tre amperemetrarna visar samma, 1 A, hur stor är då den matande växelströmmen  $I$ ? (Varning, kuggfråga)

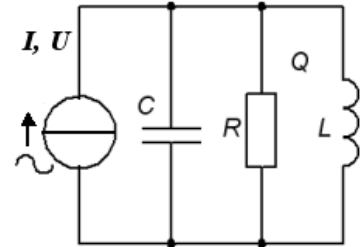


$I_L$  och  $I_C$  blir en **cirkulerande ström** frikopplad från  $I_R$ .  $I_L$ ,  $I_C$  kan vara *många gånger större* än det matande nätets ström  $I = I_R$ . Detta är parallellresonans.

# Ideal parallellresonanskrets

$$\underline{Z} = R \parallel L \parallel C = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

$= 0$



Resonansfrekvensen får precis *samma* uttryck som för serieresonanskretsen, men för övrigt har kretsen **omvänd karaktär**, IND vid låga frekvenser och KAP vid höga. Vid resonans är impedansen reell =  $R$ .

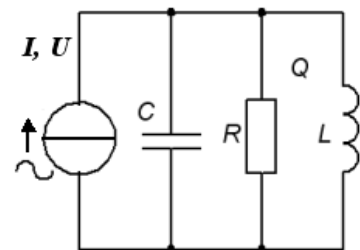
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$



# Ideal parallellresonanskrets

$$\underline{Z} = R \parallel L \parallel C = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

$= 0$

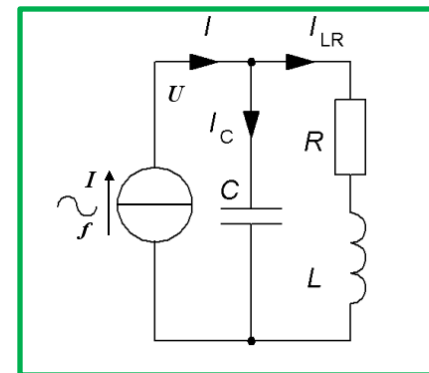


Resonansfrekvensen får precis *samma* uttryck som för serieresonanskretsen, men för övrigt har kretsen **omvänd karaktär**, IND vid låga frekvenser och KAP vid höga. Vid resonans är impedansen reell =  $R$ .

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

- **Verklig parallellresonanskrets**

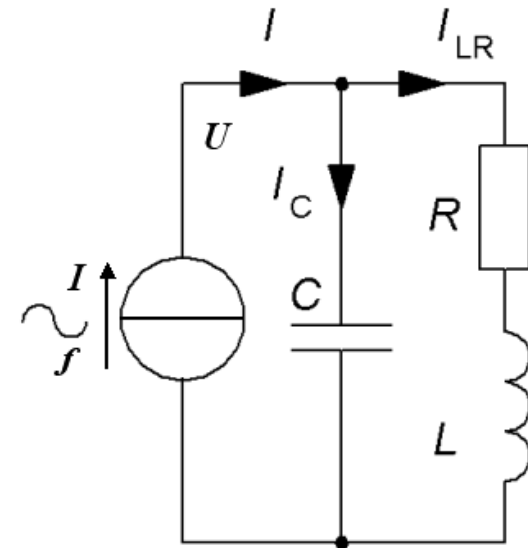
Verkliga parallellresonanskretsar har en serieresistans inuti spolen. Beräkningarna blir betydligt mer komplicerade och resonansfrekvensen kommer också att avvika något från vår formel.



William Sandqvist [william@kth.se](mailto:william@kth.se)

# Exempel, verklig krets (13.3)

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \underline{I}_C + \underline{I}_{LR} = \frac{U}{\frac{1}{j\omega C}} + \frac{U}{r + j\omega L} \cdot \frac{(r - j\omega L)}{(r - j\omega L)} = U \cdot \left( j\omega C + \frac{r - j\omega L}{r^2 + (\omega L)^2} \right) = \\ &= U \cdot \left( \frac{r}{r^2 + (\omega L)^2} + j \left( \omega C - \frac{\omega L}{r^2 + (\omega L)^2} \right) \right) \\ &\qquad\qquad\qquad = 0\end{aligned}$$

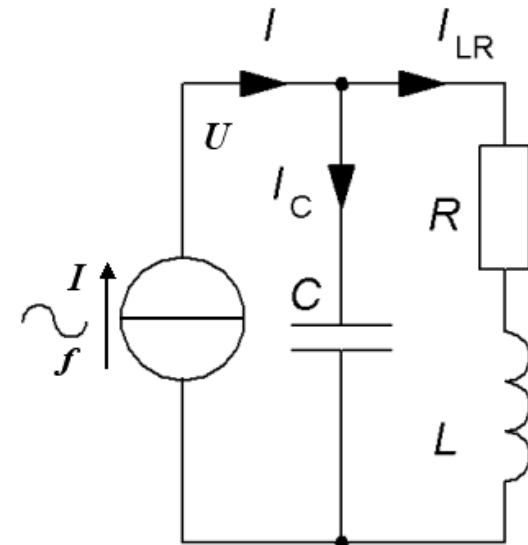


# Exempel, verklig krets (13.3)

$$\underline{I} = \underline{I}_C + \underline{I}_{LR} = \frac{U}{\frac{1}{j\omega C}} + \frac{U}{r + j\omega L} \cdot \frac{(r - j\omega L)}{(r - j\omega L)} = U \cdot \left( j\omega C + \frac{r - j\omega L}{r^2 + (\omega L)^2} \right) =$$

$$= U \cdot \left( \frac{r}{r^2 + (\omega L)^2} + j \left( \omega C - \frac{\omega L}{r^2 + (\omega L)^2} \right) \right)$$

$= 0$



$$\omega_0 C = \frac{\omega_0 L}{r^2 + (\omega_0 L)^2} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \frac{r^2}{L^2} \quad \omega_0 = 2\pi f \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left( \frac{1}{LC} - \frac{r^2}{L^2} \right)}$$

William Sandqvist [william@kth.se](mailto:william@kth.se)

# Metalldetektorn

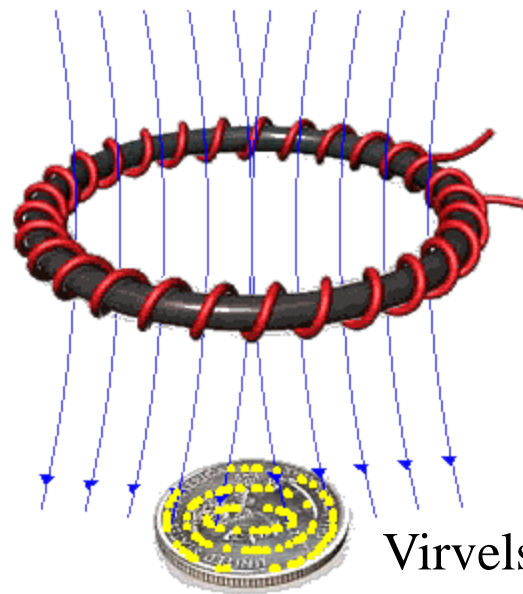
$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left( \frac{1}{LC} - \frac{r^2}{L^2} \right)}$$

Alla "förluster" (även virvelströmsförluster i alla slags metaller) sammanfattas av symbolen  $r$  !

Järnföremål påverkar magnetfältet och därmed även  $L$  !



Parallellresonansfrekvensen påverkas av spolens förluster. Så kan gömda skatter hittas!



Virvelströmsförluster

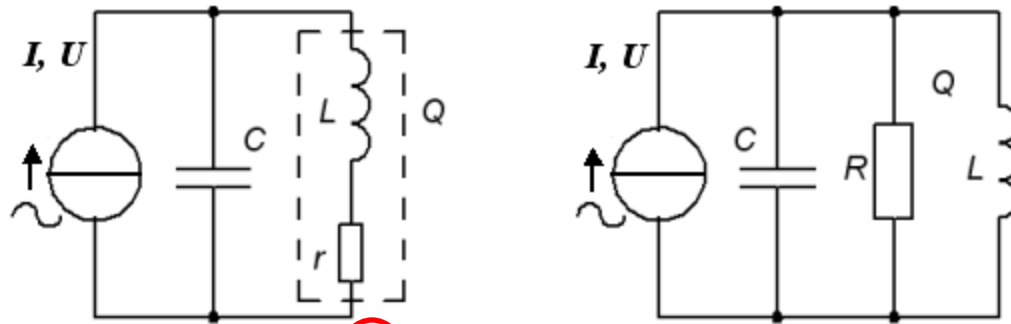
William Sandqvist [william@kth.se](mailto:william@kth.se)

# Serie- eller Parallellresistor

Vid handräkning brukar man för enkelhets skull använda formeln för den ideala resonanskretsen. Vid högt  $Q$  och nära resonansfrekvensen  $f_0$  blir avvikelserna obetydliga.

Överslagsmässigt ( vid  $Q > 10$  ) är de två kretsarna ”utbytbara”.

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Alternativ  
definition av  $Q$   
med  $R_p$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r_s} = \frac{R_p}{\omega_0 L} \Rightarrow R_p = Q^2 \cdot r_s$$

( Gäller approximativt för  $Q > 10$  )



# Exempel, parallellkrets

Parallellkrets.

$$C = 25 \text{ nF}$$

$$f_0 = 100 \text{ kHz}$$

$$BW = 1250 \text{ Hz}$$

$$L = ? \quad r = ?$$

# Exempel, parallellkrets

Parallellkrets.

$$C = 25 \text{ nF}$$

$$f_0 = 100 \text{ kHz}$$

$$BW = 1250 \text{ Hz}$$

$$L = ? \quad r = ?$$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{100 \cdot 10^3}{1250} = 80$$

# Exempel, parallellkrets

Parallellkrets.

$$C = 25 \text{ nF}$$

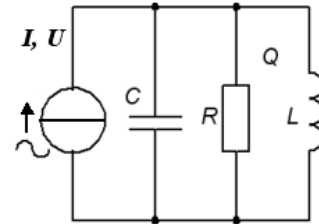
$$f_0 = 100 \text{ kHz}$$

$$BW = 1250 \text{ Hz}$$

$$L = ? \quad r = ?$$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{100 \cdot 10^3}{1250} = 80$$

$80 > 10$  vilket motiverar  
räkning med den ideala  
modellen.



# Exempel, parallellkrets

Parallellkrets.

$$C = 25 \text{ nF}$$

$$f_0 = 100 \text{ kHz}$$

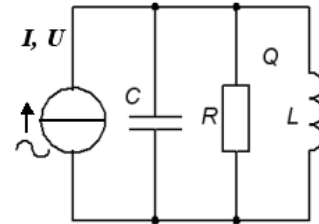
$$BW = 1250 \text{ Hz}$$

$$L = ? \quad r = ?$$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{100 \cdot 10^3}{1250} = 80$$

80 > 10 vilket motiverar  
räkning med den ideala  
modellen.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow L = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 100 \cdot 10^3)^2 \cdot 25 \cdot 10^{-9}} = 0,1 \text{ mH}$$



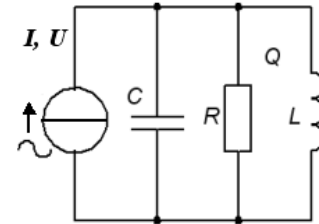
# Exempel, parallellkrets

Parallellkrets.

$$C = 25 \text{ nF}$$

$$f_0 = 100 \text{ kHz}$$

$$BW = 1250 \text{ Hz}$$



$$L = ? \quad r = ?$$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{100 \cdot 10^3}{1250} = 80$$

80 > 10 vilket motiverar  
räkning med den ideala  
modellen.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow L = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 100 \cdot 10^3)^2 \cdot 25 \cdot 10^{-9}} = 0,1 \text{ mH}$$

$$Q = \frac{R_p}{X_L} = \frac{R_p}{2\pi f_0 \cdot L} \Rightarrow R_p = 2\pi f_0 \cdot L \cdot Q = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \approx 5027 \Omega$$

# Exempel, parallellkrets

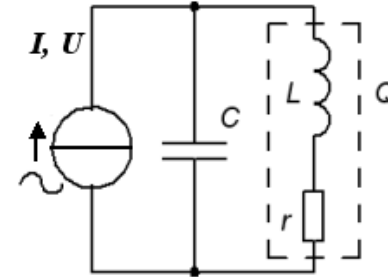
Parallellkrets.

$$C = 25 \text{ nF}$$

$$f_0 = 100 \text{ kHz}$$

$$BW = 1250 \text{ Hz}$$

*Svara med serieresistor!*



$$L = ? \quad r = ?$$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{100 \cdot 10^3}{1250} = 80$$

80 > 10 vilket motiverar  
räkning med den ideala  
modellen.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow L = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 100 \cdot 10^3)^2 \cdot 25 \cdot 10^{-9}} = 0,1 \text{ mH}$$

$$Q = \frac{R_P}{X_L} = \frac{R_P}{2\pi f_0 \cdot L} \Rightarrow R_P = 2\pi f_0 \cdot L \cdot Q = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \approx 5027 \Omega$$

$$r_s = \frac{1}{Q^2} R_P = \frac{1}{80^2} 5027 \approx 0,8 \Omega$$

# Exempel, parallellkrets

Parallellkrets.

$$C = 25 \text{ nF}$$

$$f_0 = 100 \text{ kHz}$$

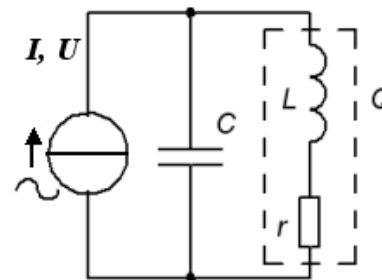
$$BW = 1250 \text{ Hz}$$

$$L = ? \quad r = ?$$

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{100 \cdot 10^3}{1250} = 80$$

*Svara med serieresistor!*

80 > 10 vilket motiverar räkning med den ideala modellen.



$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow L = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 100 \cdot 10^3)^2 \cdot 25 \cdot 10^{-9}} = 0,1 \text{ mH}$$

$$Q = \frac{R_P}{X_L} = \frac{R_P}{2\pi f_0 \cdot L} \Rightarrow R_P = 2\pi f_0 \cdot L \cdot Q = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \approx 5027 \Omega$$

$$r_s = \frac{1}{Q^2} R_P = \frac{1}{80^2} 5027 \approx 0,8 \Omega$$

Tur att vi *inte* behövde använda denna formel  $f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{L^2}\right)}}$  för att beräkna  $L$



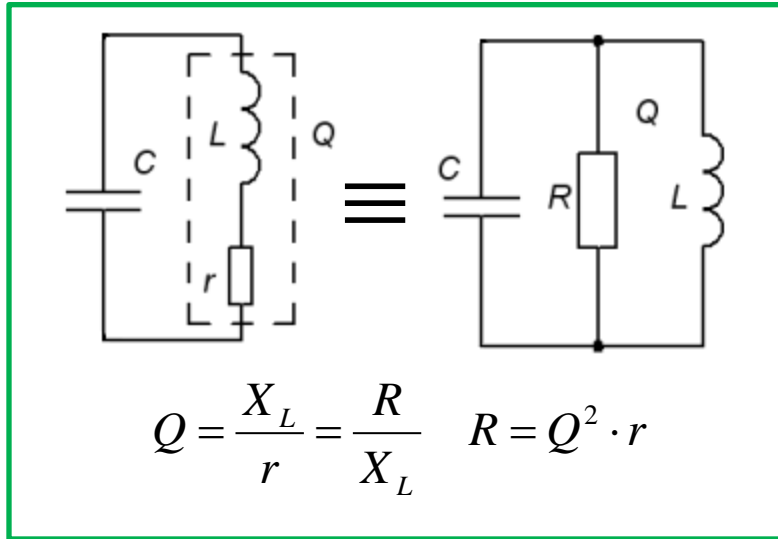


# *Numera finns det beräkningshjälp*

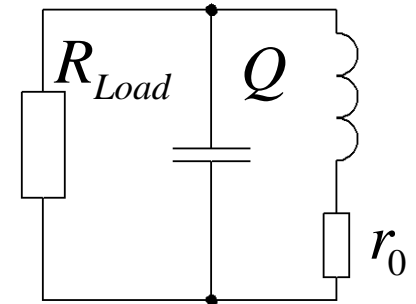
$$\begin{aligned} L &= \frac{\sqrt{1 - 16\pi^2 C^2 f_0^2 r^2} + 1}{8\pi^2 C f_0^2} = \\ &= \frac{\sqrt{1 - 16\pi^2 (25 \cdot 10^{-9})^2 \cdot (100 \cdot 10^3)^2 \cdot 0,8^2} + 1}{8\pi^2 \cdot 25 \cdot 10^{-9} \cdot (100 \cdot 10^3)^2} = 0,1 \text{ mH} \end{aligned}$$

William Sandqvist [william@kth.se](mailto:william@kth.se)

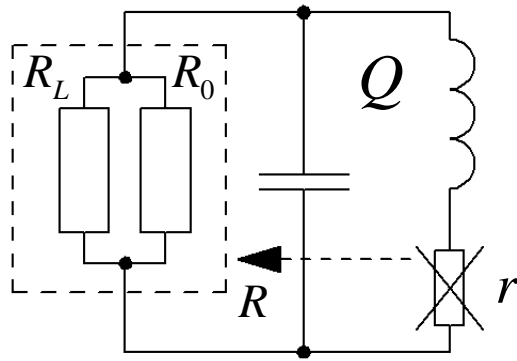
# Belastad resonanskrets



Vanligt med belastad resonanskrets!

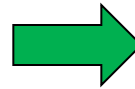


Ska den belastade resonanskretsen kunna få  $Q$  behöver man utgå ifrån en spole med mycket bättre obelastat  $Q$ -värde,  $Q_0$ !

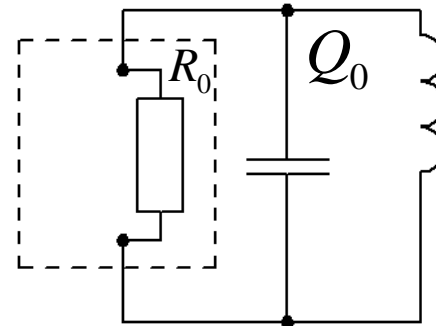


$$R_L \parallel R_0 = R$$

$$R = Q^2 \cdot r$$

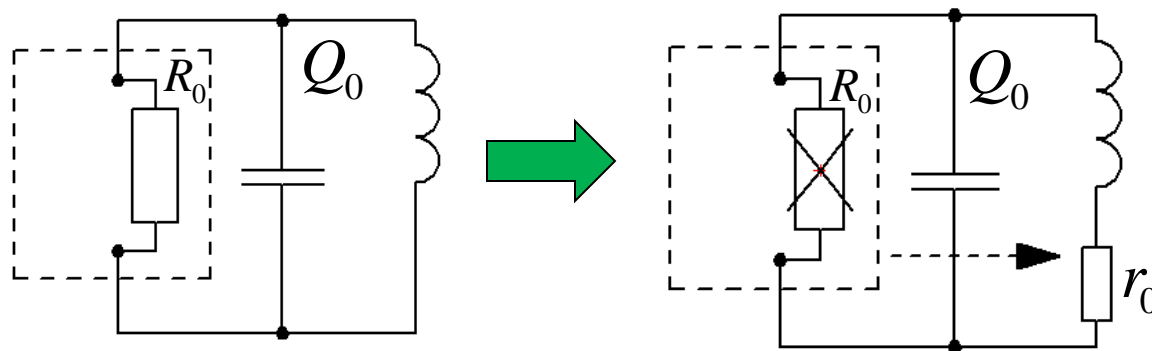


- $Q_0$  obelastat  $Q$ -värde



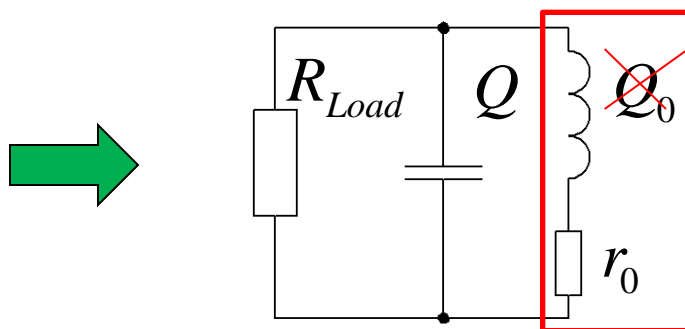
$$Q_0 = \frac{R_0}{X_L} > Q$$

# Belastad resonanskrets



$$r_0 = \frac{R_0}{Q_0^2}$$

Det behövs en spole med  $r_0$  och  $Q_0$ !



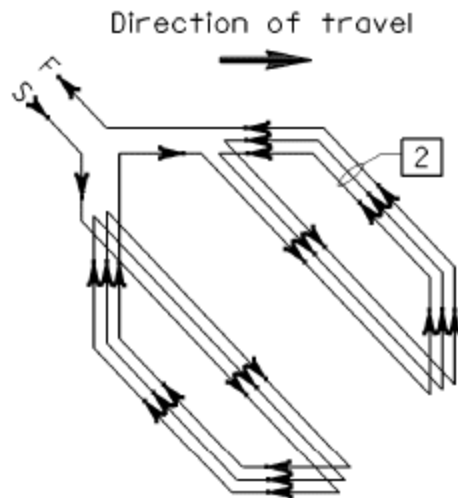
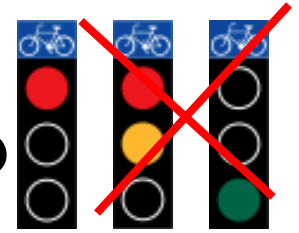
- När kretsen sedan belastas med  $R_{Load}$  förändras  $Q$ -värdet från  $Q_0$  till  $Q$ !

William Sandqvist [william@kth.se](mailto:william@kth.se)

*Den induktiva givaren är en stryktålig givartyp som finns i många utföranden.*



# Cyklister som begär grönt?



Induktiv sensor  
för cykel



*Sorry! Sensorn  
fungerar inte  
för **alla** cyklar?*

William Sandqvist [william@kth.se](mailto:william@kth.se)



