



**SF1626 Flervariabelanalys**  
**Tentamen**  
**Torsdagen den 4 juni 2015**

Skrivtid: 08:00-13:00  
Tillåtna hjälpmedel: inga  
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	F <sub>x</sub>
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

*Var god vänd!*

## DEL A

1. Funktionen  $f$  är definierad på området som ges av olikheterna  $x > 1/2$  och  $y > 0$  genom

$$f(x, y) = \ln(2x - 1) + \ln(y) - xy - x.$$

- (a) Förklara vad det innebär att en punkt är en *stationär punkt*<sup>1</sup> för funktionen  $f$  och kontrollera att  $(1, 1)$  är en sådan punkt. **(1 p)**
- (b) Skriv upp Taylorutvecklingen till  $f$  av ordning två i punkten  $(1, 1)$ . **(2 p)**
- (c) Avgör vilken typ den stationära punkten  $(1, 1)$  har. **(1 p)**
2. Låt  $\mathbf{r}(t)$  beskriva en partikels position i  $xy$ -planet där den rör sig moturs med en konstant vinkelhastighet om  $\omega$  radianer per sekund i en cirkel med radie  $R$  kring origo.
- (a) Skriv upp uttrycket för  $\mathbf{r}(t)$  om partikeln vid tiden  $t = 0$  s befinner sig i punkten  $(R, 0)$ . **(1 p)**
- (b) Beräkna derivatan  $\mathbf{r}'(t)$  med hjälp av uttrycket från del (a). **(1 p)**
- (c) Arbetet som utförs av en kraft  $\mathbf{F}(t)$  under rörelsen ges av  $\int_C \mathbf{F}(t) \cdot d\mathbf{r}$ . Newtons andra lag säger att den kraft som verkar på partikeln är  $m\mathbf{r}''(t)$ , där  $m$  är partikelns massa. Vilket arbete utför denna kraft medan partikeln färdas ett halvt varv kring origo? **(2 p)**

3. Betrakta den kropp  $K$  i rummet som ges av olikheterna

$$0 \leq z \leq x^2 + 4y^2 \quad \text{och} \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Volymen av kroppen kan beräknas med trippelintegralen

$$\iiint_K 1 \, dV = \iiint_K 1 \, dx dy dz.$$

- (a) Ställ upp den trippelintegral som ger volymen av  $K$  med upprepad integration i de rätvinkliga koordinaterna  $x$ ,  $y$  och  $z$ . **(1 p)**
- (b) Utför det variabelbyte som krävs för att beräkna trippelintegralen från del (a) med hjälp av *cylinderkoordinater*. **(1 p)**
- (c) Beräkna volymen av  $K$ , exempelvis genom att beräkna trippelintegralen från del (b). **(2 p)**

---

<sup>1</sup>En stationär punkt kallas också för en *kritisk punkt*.

## DEL B

4. Beräkna flödet av vektorfältet  $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, y^3 + x^2z)$  ut genom begränsningsytan till den cylinderformade kropp  $K$  som ges av olikheterna

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{och} \quad 0 \leq z \leq 1$$

antingen genom att parametrisera ytans olika delar eller genom att använda divergenssatsen. **(4 p)**

5. För att flyga med flygbolaget *Lagrangian Airlines* krävs att det incheckade bagagets ytermått skall uppfylla att summan av dess höjd, bredd och djup inte överskrider 150 cm. Bestäm den maximala volym som en rätvinklig parallelepiped kan ha för att få tas med som incheckat bagage. **(4 p)**

6. I en enkel modell av ett gasmoln antas det utanför klotet  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  ha en masstäthet som i lämpliga enheter ges av

$$f(x, y, z) = K \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Beräkna gasmolnets totala massa.

**(4 p)**

*Var god vänd!*

## DEL C

7. Låt  $K$  vara den homogena kropp som beskrivs av olikheterna

$$z \geq 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \quad \text{och} \quad z^2 \geq x^2 + y^2.$$

Beräkna  $z$ -komponenten av masscentrum för kroppen  $K$ . (4 p)

8. Betrakta den vektorvärda funktionen  $\mathbf{f}$  som ges av

$$\mathbf{f}(x, y) = \left( xy, \frac{x^2 - y^2}{2} \right)$$

för alla  $(x, y)$  i  $\mathbb{R}^2$ . Punkten  $(x, y) = (\sqrt{3}, 1)$  är en *fixpunkt* till  $\mathbf{f}$ , vilket betyder att  $\mathbf{f}(\sqrt{3}, 1) = (\sqrt{3}, 1)$ . För varje positivt heltal  $n$  kan vi bilda funktionen  $\mathbf{f}_n$  genom att sätta samman  $\mathbf{f}$  med sig själv  $n$  gånger, dvs  $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f} \circ \mathbf{f}$ ,  $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f} \circ \mathbf{f} \circ \mathbf{f}$ , etc.

(a) Bestäm Jacobimatrisen  $D\mathbf{f}$  i fixpunkten  $(\sqrt{3}, 1)$ . (1 p)

(b) Visa att  $(\sqrt{3}, 1)$  är en fixpunkt för alla funktionerna  $\mathbf{f}_n$ , för  $n \geq 1$ . (1 p)

(c) Bestäm ett uttryck för Jacobimatrisen  $D\mathbf{f}_n$  i fixpunkten  $(\sqrt{3}, 1)$  som gäller för alla  $n \geq 1$ . (2 p)

9. Beräkna kurvintegralen  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  där vektorfältet  $\mathbf{F}$  ges av

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + 4y)$$

och  $C$  är kurvan som ges av

$$\mathbf{r}(t) = (t \cos(1 - t^2), t^2, t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(4 p)