KTH Teknikvetenskap

# SF1626 Flervariabelanalys
# Lösningsförslag till tentamen 2015-06-04

## DEL A

1. Funktionen $f$ är definierad på området som ges av olikheterna $x > 1/2$ och $y > 0$ genom
$$f(x, y) = \ln(2x - 1) + \ln(y) - xy - x.$$
   (a) Förklara vad det innebär att en punkt är en *stationär punkt*[1] för funktionen $f$ och kontrollera att $(1, 1)$ är en sådan punkt. **(1 p)**
   (b) Skriv upp Taylorutvecklingen till $f$ av ordning två i punkten $(1, 1)$. **(2 p)**
   (c) Avgör vilken typ den stationära punkten $(1, 1)$ har. **(1 p)**

**Lösningsförslag.**

(a) Att en punkt är *stationär* innebär att gradienten för funktionen är noll i den punkten. I vårt fall är gradienten
$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \left(\frac{2}{2x - 1} - y - 1, \frac{1}{y} - x\right)$$
och när vi beräknar det för $(x, y) = (1, 1)$ får vi
$$\nabla f(1, 1) = \left(\frac{2}{2 \cdot 1 - 1} - 1 - 1, \frac{1}{1} - 1\right) = (2 - 1 - 1, 1 - 1) = (0, 0).$$
Alltså är $(1, 1)$ en stationär punkt.

(b) För Taylorpolynomet av grad två behövs andraderivatorna av $f$ och dessa ges av
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{4}{(2x - 1)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1 \quad \text{och} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}.$$
I punkten $(x, y) = (1, 1)$ får vi
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1 \quad \text{och} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -1.$$

[1] En stationär punkt kallas också för en *kritisk punkt*.

Värdet i punkten $(1,1)$ är $f(1,1) = 0+0-1-1 = -2$ och eftersom det är en stationär punkt är den linjära termen noll. Därmed ges Taylorpolynomet kring punkten $(1,1)$ av

$$p(x,y) = -2 + (-4)\frac{(x-1)^2}{2} - (x-1)(y-1) - \frac{(y-1)^2}{2}$$

(c) Typen för den stationära punkten bestäms av andragradstermen som kan skrivas som

$$\frac{1}{2}\left(-4h^2 - 2hk - k^2\right) = -\frac{1}{2}\left(3h^2 + (h+k)^2\right)$$

som är negativt definit. Därmed är $(1,1)$ ett lokalt maximum. Vi kan också se detta genom att se på egenvärdena till matrisen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

I och med att determinanten är $4-1=3$ som är positiv har båda egenvärdena samma tecken och i och med att spåret är negativt måste de båda vara negativa och vi drar åter igen slutsatsen att formen är negativt definit och $(1,1)$ en lokal maxpunkt.

**Svar.**

(b) Taylorpolynomet är $p(x,y) = -2 + (-4)\frac{(x-1)^2}{2} - (x-1)(y-1) - \frac{(y-1)^2}{2}$.

(c) Punkten $(1,1)$ är ett lokalt maximum.

2. Låt $\mathbf{r}(t)$ beskriva en partikels position i $xy$-planet där den rör sig moturs med en konstant vinkelhastighet om $\omega$ radianer per sekund i en cirkel med radie $R$ kring origo.
   (a) Skriv upp uttrycket för $\mathbf{r}(t)$ om partikeln vid tiden $t = 0$ s befinner sig i punkten $(R, 0)$. **(1 p)**
   (b) Beräkna derivatan $\mathbf{r}'(t)$ med hjälp av uttrycket från del (a). **(1 p)**
   (c) Arbetet som utförs av en kraft $\mathbf{F}(t)$ under rörelsen ges av $\int_C \mathbf{F}(t) \cdot d\mathbf{r}$. Newtons andra lag säger att den kraft som verkar på partikeln är $m\mathbf{r}''(t)$, där $m$ är partikelns massa. Vilket arbete utför denna kraft medan partikeln färdas ett halvt varv kring origo? **(2 p)**

**Lösningsförslag.**

(a) Om vi använder polära koordinater har vi $r = R$ och $\theta = \omega t$ och när vi skriver det i rektangulära koordinater får vi

$$\mathbf{r}(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t))\,.$$

(b) Vi deriverar $\mathbf{r}(t)$ med avseende på $t$ och får

$$\mathbf{r}'(t) = (-R\omega\sin(\omega t), R\omega\cos(\omega t))\,.$$

(c) Arbetet ges av

$$\int_C \mathbf{F}(t) \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = 0$$

eftersom

$$\mathbf{r}''(t) = \big(-R\omega^2\cos(\omega t), -R\omega^2\sin(\omega t)\big)$$

som är vinkelrät mot $\mathbf{r}'(t)$ för alla $t$.

**Svar.**

(a) $\mathbf{r}(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t))$.
(b) $\mathbf{r}'(t) = (-R\omega\sin(\omega t), R\omega\cos(\omega t))$.
(c) Arbetet är noll.

3. Betrakta den kropp $K$ i rummet som ges av olikheterna

$$0 \leq z \leq x^2 + 4y^2 \qquad \text{och} \qquad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Volymen av kroppen kan beräknas med trippelintegralen

$$\iiint_K 1\, dV = \iiint_K 1\, dxdydz.$$

(a) Ställ upp den trippelintegral som ger volymen av $K$ med upprepad integration i de rätvinkliga koordinaterna $x$, $y$ och $z$. **(1 p)**

(b) Utför det variabelbyte som krävs för att beräkna trippelintegralen från del (a) med hjälp av *cylinderkoordinater*. **(1 p)**

(c) Beräkna volymen av $K$, exempelvis genom att beräkna trippelintegralen från del (b). **(2 p)**

**Lösningsförslag.**

(a) Vi kan beskriva cirkeln med olikheterna $-1 \leq x \leq 1$, $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ och därmed kan trippelintegralen skriva som

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{x^2+4y^2} 1\, dzdydx.$$

(b) Vid variabelbytet till cylinderkoordinater $[r, \theta, z]$ fås $dxdydz = r\, drd\theta dz$ och kroppen ges av olikheterna $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$ och $0 \leq z \leq r^2(\cos^2\theta + 4\sin^2\theta)$. Därmed blir integralen

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2(\cos^2\theta+4\sin^2\theta)} r\, dzdrd\theta.$$

(c) Vi beräknar integralen från del (b) som

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2} r\, dzdrd\theta \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\, [z]_0^{r^2(\cos^2\theta+4\sin^2\theta)}\, drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3(\cos^2\theta + 4\sin^2\theta)\, drd\theta = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta + 4\sin^2\theta)\, d\theta = \frac{1}{4} \cdot 5\pi = \frac{5\pi}{4}.$$

**Svar.**

(a) $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{x^2+4y^2} 1\, dzdydx$.

(b) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2(\cos^2\theta+4\sin^2\theta)} r\, dzdrd\theta$.

(c) Volymen är $5\pi/4$.

## DEL B

4. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, y^3 + x^2 z)$ ut genom begränsningsytan till den cylinderformade kropp $K$ som ges av olikheterna

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{och} \quad 0 \leq z \leq 1$$

antingen genom att parametrisera ytans olika delar eller genom att använda divergenssatsen. **(4 p)**

**Lösningsförslag.** Om vi väljer att använda divergenssatsen ser vi först att

$$\mathbf{div}\,\mathbf{F} = y + z + x^2.$$

och eftersom $\mathbf{F}$ är kontinuerligt deriverbart och begränsningsytan till $K$ är styckvis slät får vi

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_K \mathbf{div}\,\mathbf{F}\, dxdydz = \int_K (x^2 + y + z)\, dxdydz.$$

Vi kan sedan byta till cylinderkoordinater och får

$$\int_K (x^2 + y + z)\, dxdydz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos^2\theta + r\sin\theta + z) r\, drd\theta dz$$

Varje term kan beräknas som en produkt.

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos^2\theta\, drd\theta dz = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^1 r^3\, dr \int_0^1 1\, dz = \pi \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \cdot 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin\theta r\, drd\theta dz = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^1 r^3\, dr \int_0^1 1\, dz = [-\cos\theta]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \cdot 1 = 0$$

och

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 zr\, drd\theta dz = \int_0^{2\pi} 1\, d\theta \int_0^1 r\, dr \int_0^1 z\, dz = 2\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Sammantaget får vi

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos^2\theta + r\sin\theta + z) r\, drd\theta dz = \frac{\pi}{4} + 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

Väljer vi istället att parametrisera ytans delar får vi tre olika delar. Vi börjar med mantelytan som kan parametriseras med $\mathbf{r}(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$. En utåtriktad normerad normalvektor ges av $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ och därför ges flödet av integralen

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (\cos\theta\sin\theta, z\sin\theta, \sin^3\theta + z\cos^2\theta)\cdot(\cos\theta, \sin\theta, 0)\, dzd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos^2\theta\sin\theta + z\sin^2\theta\, dzd\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin\theta\int_0^1 dz + \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\int_0^1 z\, dz$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{2\pi}\cdot 1 + \pi\cdot\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Bottenytan är en cirkelskiva som parametriseras av $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ och en utåtriktad normerad normalvektor är $(0,0,-1)$. Därmed blir flödet genom denna del

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\cos\theta\sin\theta, 0, r^3\sin^3\theta)\cdot(0,0,-1)\, rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -r^3\sin^3\theta\, rdrd\theta$$

$$= -\int_0^1 r^4\, dr\int_0^{2\pi}\sin\theta(1-\cos^2\theta)\, d\theta = -\frac{1}{5}\cdot\left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Slutligen ges den övre begränsningsytan av $\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1)$. En utåtriktad normerad normalvektor ges av $(0,0,1)$ och därför ges flödet av integralen

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\cos\theta\sin\theta, r\sin\theta, r^3\sin^3\theta + r^2\cos^2\theta)\cdot(0,0,1)\, rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\sin^3\theta + r^2\cos^2\theta\, rdrd\theta$$

Den första termen är noll enligt den förra beräkningen och den andra ger

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos^2\theta\, rdrd\theta = \int_0^1 r^3\, dr\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta + 1}{2}\, d\theta = \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Sammataget blir flödet

$$\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

**Svar.** Flödet genom ytan är $3\pi/4$.

5. För att flyga med flygbolaget *Lagrangian Airlines* krävs att det incheckade bagagets yttermått skall uppfylla att summan av dess höjd, bredd och djup inte överskrider $150$ cm. Bestäm den maximala volym som en rätvinklig parallellepiped kan ha för att få tas med som incheckat bagage. **(4 p)**

**Lösningsförslag.** Vi behöver maximera volymen $V(x, y, z) = xyz$ av ett rätblock med höjd $x$, bredd $y$ och längd $z$ givet att $x, y, z \geq 0$ cm och $x + y + z \leq 150$ cm. Detta måste finnas ett maximum för funktionen eftersom den är deriverbar och definierad på en kompakt mängd. Vi börjar med att leta efter maximum bland stationära punkter till $V(x, y, z)$. Dessa ges av lösningar till $\mathbf{grad}\, V(x, y, z) = (0, 0, 0)$, dvs

$$\begin{cases} yz &= 0, \\ xz &= 0, \\ xy &= 0, \end{cases}$$

vilket ger att $V(x, y, z) = xyz = x(yz) = x \cdot 0 = 0$. Detta kan inte vara maximum eftersom $V$ kan anta positiva värden. Vi ser sedan på randen som ges av tre delar där en av variablerna är noll och en triangel där $x+y+z = 150$ cm. På delarna där en variabel är noll är också volymen noll, vilket återigen inte kan vara maximum. Vi ser till slut på den del av randen där $x+y+z = 150$ cm. Enligt Lagranges metod ska gradienten till $V$ vara parallell med gradienten till bivillkoret vid ett optimum. I det här fallet ska alltså $(yz, xz, xy)$ vara parallell med $(1, 1, 1)$, vilket ger $x = y = z$ som med bivillkoret $x + y + z = 150$ cm ger $x = y = z = 50$ cm. Då blir volymen $(50 \text{ cm})^3 = 125\,000 \text{ cm}^3 = 125 \text{ dm}^3$. Detta måste vara det eftersökta maximala värdet för volymen.

**Svar.** Den maximala volymen är $125$ dm$^3$, dvs $125$ liter.

6. I en enkel modell av ett gasmoln antas det utanför klotet $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ ha en masstäthet som i lämpliga enheter ges av
$$f(x,y,z) = K\frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$
Beräkna gasmolnets totala massa. **(4 p)**

**Lösningsförslag.** Beteckna området klotet för $\Omega$. Vi behöver beräkna integralen
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = K\iiint_\Omega \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz.$$
Vi går över till sfäriska koordinater $[r,\phi,\theta]$ och får
$$x^2+y^2+z^2 = r^2 \quad \text{och} \quad dxdydz = r^2\sin\phi\,drd\phi d\theta.$$
Integrationsgränserna är
$$1 \leq r \leq \infty, \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad \text{och} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$
Integralen är generaliserad eftersom området inte är begränsat. Eftersom integranden är positiv räcker det att låta den övre integrationsgränsen för $r$ gå mot oändligheten och ta gränsvärde. Alltså blir massan
$$\begin{aligned}
m &= \lim_{R\to\infty} K\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^R \frac{e^{-r^2}}{r}\cdot r^2\sin\phi\,drd\phi d\theta \\
&= K\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi\int_1^R re^{-r^2}\,dr \\
&= 2\pi K\left[-\cos\phi\right]_0^{\pi}\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_1^R \\
&= 2\pi K\cdot(1-(-1))\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-R^2}-\left(-\frac{e^{-1}}{2}\right)\right) = \frac{2\pi K}{e},
\end{aligned}$$
där vi har använt att $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0$.

**Svar.** Klotets massa är $2\pi K/e$.

## DEL C

7. Låt $K$ vara den homogena kropp som beskrivs av olikheterna
$$z \geq 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \quad \text{och} \quad z^2 \geq x^2 + y^2.$$
Beräkna $z$-komponenten av masscentrum för kroppen $K$. **(4 p)**

**Lösningsförslag.** För att beräkna $z$-komponenten för masscentrum behöver vi beräkna kvoten
$$\frac{\iiint_K z\,dxdydz}{\iiint_K 1\,dxdydz}.$$
För båda integralerna är det lämpligt att använda cylinderkoordinater och gränserna för $K$ ges då av $r^2 \leq z^2 \leq 4 - r^2$ och $0 \leq \theta \leq 2\pi$. För att $r^2 \leq 4 - r^2$ måste $r \leq \sqrt{2}$. Den första integralen blir därmed
$$\iiint_K z\,dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{4-r^2}} zr\,dzdrd\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left[\frac{rz^2}{2}\right]_r^{\sqrt{4-r^2}} dr$$
$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{r(4-r^2) - r^3}{2}\right) dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(2r - r^3\right) dr = 2\pi \left[r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \left(2 - \frac{4}{4}\right) = 2\pi$$
Den andra integralen blir
$$\iiint_K 1\,dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{4-r^2}} r\,dzdrd\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} [rz]_r^{\sqrt{4-r^2}}\,dr$$
$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(r\sqrt{4-r^2} - r^2\right) dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(2r - r^3\right) dr = 2\pi \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (4-r^2)^{3/2} - \frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}}$$
$$= 2\pi \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{8}{3} + 0\right) = 2\pi \cdot \frac{8 - 4\sqrt{2}}{3}.$$
Därmed blir $z$-komponenten av masscentrum
$$\frac{\iiint_K z\,dxdydz}{\iiint_K 1\,dxdydz} = \frac{2\pi}{2\pi \cdot \frac{8-4\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{8 - 4\sqrt{2}} = \frac{3(8 + 4\sqrt{2})}{64 - 32} = \frac{3(2 + \sqrt{2})}{8}$$
I den ursprungliga tentamenslydelsen fattades olikheten $z \geq 0$ och då blir kroppen $K$ symmetrisk kring $z = 0$ vilket gör att kroppens masscentrum hamnar vid $z = 0$ av symmetriskäl.

**Svar.** $z$-komponenten av kroppens masscentrum är $3(2 + \sqrt{2})/8$.

8. Betraka den vektorvärda funktionen $\mathbf{f}$ som ges av
$$\mathbf{f}(x,y) = \left(xy, \frac{x^2-y^2}{2}\right)$$
för alla $(x,y)$ i $\mathbb{R}^2$. Punkten $(x,y) = (\sqrt{3},1)$ är en *fixpunkt* till $\mathbf{f}$, vilket betyder att $\mathbf{f}(\sqrt{3},1) = (\sqrt{3},1)$. För varje positivt heltal $n$ kan vi bilda funktionen $\mathbf{f}_n$ genom att sätta samman $\mathbf{f}$ med sig själv $n$ gånger, dvs $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}\circ\mathbf{f}$, $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}\circ\mathbf{f}\circ\mathbf{f}$, etc.
   (a) Bestäm Jacobimatrisen $D\mathbf{f}$ i fixpunkten $(\sqrt{3},1)$. **(1 p)**
   (b) Visa att $(\sqrt{3},1)$ är en fixpunkt för alla funktionerna $\mathbf{f}_n$, för $n \geq 1$. **(1 p)**
   (c) Bestäm ett uttryck för Jacobimatrisen $D\mathbf{f}_n$ i fixpunkten $(\sqrt{3},1)$ som gäller för alla $n \geq 1$. **(2 p)**

**Lösningsförslag.**

(a) Jacobimatrisen ges av
$$D\mathbf{f}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \\ x & -y \end{bmatrix}$$
och när vi sätter in $(x,y) = (\sqrt{3},1)$ får vi
$$D\mathbf{f}(\sqrt{3},1) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Eftersom vi har att $\mathbf{f}(\sqrt{3},1) = (\sqrt{3}\cdot 1, ((\sqrt{3})^2-1)/2) = (\sqrt{3},1)$ har vi att $\mathbf{f}_{n+1}(\sqrt{3},1) = \mathbf{f}_n(\mathbf{f}(\sqrt{3},1)) = \mathbf{f}_n(\sqrt{3},1)$ för alla $n \geq 1$. Därmed får vi
$$\mathbf{f}_n(\sqrt{3},1) = \mathbf{f}_{n-1}(\sqrt{3},1) = \cdots = \mathbf{f}_1(\sqrt{3},1) = (\sqrt{3},1).$$

(c) Kedjeregeln säger att Jacobimatrisen för en sammansättning är matrisprodukten av Jacobimatriserna. Eftersom $(\sqrt{3},1)$ är en fixpunkt beräknas alla Jacobimatriserna i samma punkt och vi får
$$D\mathbf{f}_n(\sqrt{3},1) = (D\mathbf{f}(\sqrt{3},1))^n = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}^n.$$
Vi har att
$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$
och därmed har vi
$$D\mathbf{f}_n(\sqrt{3},1) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} & \text{om } n \text{ är jämnt} \\[2ex] \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1}\sqrt{3} \\ 2^{n-1}\sqrt{3} & -2^{n-1} \end{bmatrix} & \text{om } n \text{ är udda} \end{cases}$$

Detta kan också skrivas som

$$\begin{aligned} D\mathbf{f}_n(\sqrt{3},1) &= 2^{n-2}\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} + (-2)^{n-2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \\ &= 2^{n-2}\begin{bmatrix} 3+(-1)^n & (1-(-1)^n)\sqrt{3} \\ (1-(-1)^n)\sqrt{3} & 1+3(-1)^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Svar.**

(a) Jacobimatrisen är $D\mathbf{f}(\sqrt{3},1) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$.

(c) Jacobimatrisen för sammansättningen $\mathbf{f}_n$ är

$$D\mathbf{f}_n(\sqrt{3},1) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}^n = 2^{n-2}\begin{bmatrix} 3+(-1)^n & (1-(-1)^n)\sqrt{3} \\ (1-(-1)^n)\sqrt{3} & 1+3(-1)^n \end{bmatrix}.$$

9. Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + 4y)$$
och $C$ är kurvan som ges av
$$\mathbf{r}(t) = (t \cos(1 - t^2),\, t^2,\, t), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$
**(4 p)**

**Lösningsförslag.** Vi kan se att fältet inte är konservativt genom att beräkna rotationen som ger
$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = (4 - 1, 1 - 1, 1 - 1) = (3, 0, 0),$$
men vi kan dela upp fältet i en summa av ett konservativt fält $\mathbf{G}$ och ett fält $\mathbf{H} = (0, 0, 3y)$. Kurvintegralen över det först fältet kan beräknas med hjälp av en potiential och den andra kan beräknas direkt eftersom den unviker $x$-komponenten av kurvan. En potential för $\mathbf{G}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ ges av $\Phi(x, y, z) = xy + yz + zx$ och eftersom kurvan går från $(0, 0, 0)$ till $(1, 1, 1)$ blir kurvintegralen
$$\int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(1, 1, 1) - \Phi(0, 0, 0) = 3 - 0 = 3.$$
Den andra kurvitgralen ges av
$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_C 3y\, dz = \int_0^1 3t^2\, dt = \left[t^3\right]_0^1 = 1.$$
Sammantaget får vi kurvintegralen
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = 3 + 1 = 4.$$
Det går också att beräkna integralen direkt som
$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (t^2 + t)(\cos(1 - t^2) + 2t^2 \sin(1 - t^2) + (t \cos(1 - t^2) + t) \cdot 2t + t \cos(1 - t^2) + 4t^2\, dt \\
&\qquad = \int_0^1 (3t^2 + 2t) \cos(1 - t^2) + 2(t^4 + t^3) \sin(1 - t^2) + 6t^2\, dt \\
&\qquad = \int_0^1 (3t^2 + 2t) \cos(1 - t^2) + (t^3 + t^2) 2t \sin(1 - t^2) + 6t^2\, dt \\
&\qquad\qquad = \left[(t^3 + t^2) \cos(1 - t^2) + 2t^3\right]_0^1 = 2 + 2 - 0 - 0 = 4
\end{aligned}$$
där vi använt att derivatan av $\cos(1 - t^2)$ är $2t \sin(1 - t^2)$.

**Svar.** Kurvintegralen är $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 4$.