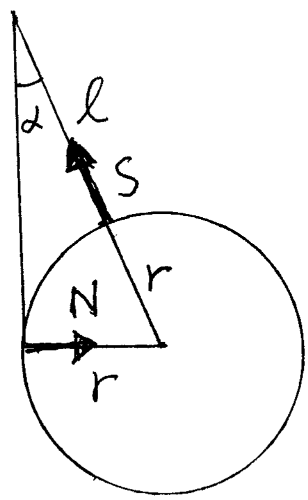
Lösningar till tentamen, SG1109, 8/6, 2015

1. Ur figuren fås

$$\sin\alpha = \frac{r}{r+l}\,. \tag{1}$$



Trigonometriska ettan ger

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{r^2}{(r+l)^2}} = \frac{\sqrt{l^2+2rl}}{r+l}\,. \tag{2}$$

Jämvikt ger

$$S\cos\alpha - mg = 0 \quad\Rightarrow\quad S = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{mg(r+l)}{\sqrt{l^2+2rl}}\,, \tag{3}$$

$$N - S\sin\alpha = 0 \quad\Rightarrow\quad N = \frac{S}{\sin\alpha} = \frac{mg(r+l)^2}{r\sqrt{l^2+2rl}} \tag{4}$$

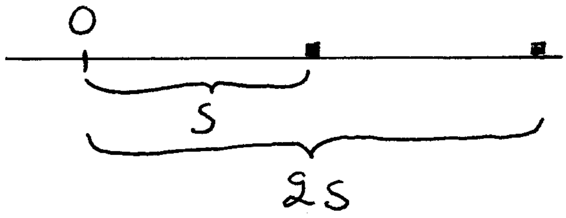
Av symmetriskäl blir spännkraften i den andra linan lika stor.

2. Låt v_1 och v_1' vara den första partikelns hastighet före respektive efter stöt och v_2' vara den andra partikelns hastighet efter stöt. Före stöt är den andra partikels hastighet noll. Rörelsemängden bevaras

$$v_1' + v_2' = v_1 \,, \tag{5}$$

där vi utnyttjat att partiklarna har samma massa. Definitionen av studstalet ger

$$\frac{v_2' - v_1'}{v_1} = e \,. \tag{6}$$



Ekvation (5) och (6) ger

$$v_1' = \frac{(1-e)v_1}{2} \,, \tag{7}$$

$$v_2' = \frac{(1+e)v_1}{2} \,. \tag{8}$$

Lagen om den kinesiska energin ger

$$-\frac{mv_1'^2}{2} = -\mu N s \,, \tag{9}$$

$$-\frac{mv_2'^2}{2} = -\mu N 2s \,, \tag{10}$$

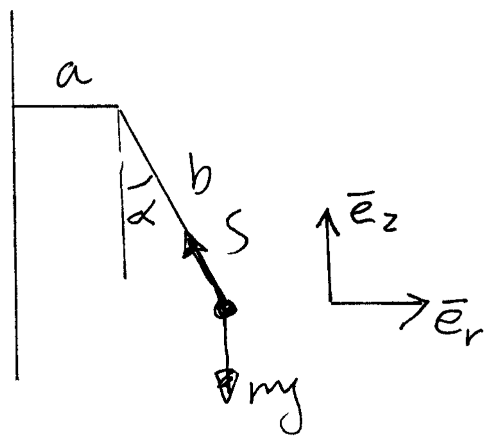
där $N = mg$ är normalkraften från underlaget. Ekvation (7-10) ger

$$\frac{(1+e)^2}{(1-e)^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad 1+e = \sqrt{2}(1-e) \quad \Rightarrow \quad e = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2} \,. \tag{11}$$

3. Newtons andra lag ger:

$$\mathbf{e}_r: \quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -S\sin\alpha\,, \tag{12}$$

$$\mathbf{e}_z: \quad 0 = S\cos\alpha - mg\,. \tag{13}$$



Ur figuren fås att $r = a + b\sin\alpha$. Då $\dot{\theta} = \omega$ får vi

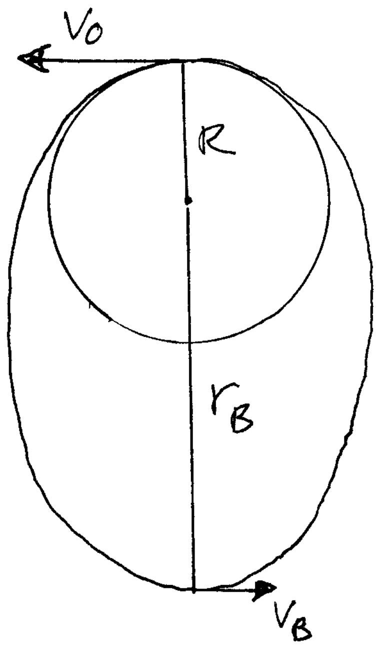
$$m(a + b\sin\alpha)\omega^2 = S\sin\alpha\,, \tag{14}$$

$$S = \frac{mg}{\cos\alpha}\,. \tag{15}$$

Detta ger

$$\omega = \sqrt{\frac{g\tan\alpha}{a + b\sin\alpha}}\,. \tag{16}$$

4. Satelliten kommer att röra sig i en ellips. Låt B vara punkten längst bort från jordens centrum. Rörelsemängsmomentets och energins bevarande ger



$$Rv_0 = r_B v_B\,, \tag{17}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{mgR^2}{R} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{mgR^2}{r_B}\,. \tag{18}$$

Med $v_0 = \sqrt{cRg}$, fås

$$v_B = \sqrt{cRg}\frac{R}{r_B}\,. \tag{19}$$

Allt instoppat i (18) ger nu

$$\frac{1}{2}cRG - RG = \frac{1}{2}cRG\frac{R^2}{r_B^2} - \frac{gR^2}{r_B} \quad \Rightarrow (2+c)r_B^2 - 2Rr_B + cR^2 = 0 \Rightarrow \tag{20}$$

$$r_B^2 - \frac{2R}{2-c}r_B + \frac{cR^2}{2-c} = 0 \quad \Rightarrow r_B = \frac{R}{2-c} \pm \sqrt{\frac{R^2}{(2-c)^2} - \frac{cR^2}{2-c}} = \tag{21}$$

$$= R\left(\frac{1}{2-c} \pm \sqrt{\frac{c^2+1-2c}{(2-c)^2}}\right) = R\left(\frac{1}{2-c} \pm \frac{c-1}{2-c}\right)\,. \tag{22}$$

Om vi väljer minustecknet får vi

$$r_B = R\,, \tag{23}$$

vilket inte kan vara lösningen för det största avståndet eftersom det är lösningen för utgångspunkten som är det minsta avståndet. Alltså måste vi välja plustecknet, vilket ger

$$r_B = \frac{cR}{2-c}\,. \tag{24}$$