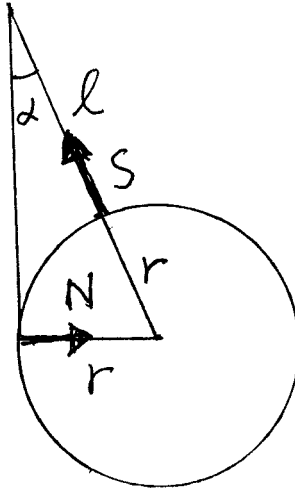


# Lösningar till tentamen, SG1109, 8/6, 2015

1. Ur figuren fås

$$\sin \alpha = \frac{r}{r+l}. \quad (1)$$



Trigonometriska ettan ger

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{r^2}{(r+l)^2}} = \frac{\sqrt{l^2 + 2rl}}{r+l}. \quad (2)$$

Jämvikt ger

$$S \cos \alpha - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{mg}{\cos \alpha} = \frac{mg(r+l)}{\sqrt{l^2 + 2rl}}, \quad (3)$$

$$N - S \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad N = S \sin \alpha = \frac{mgr}{\sqrt{l^2 + 2rl}} \quad (4)$$

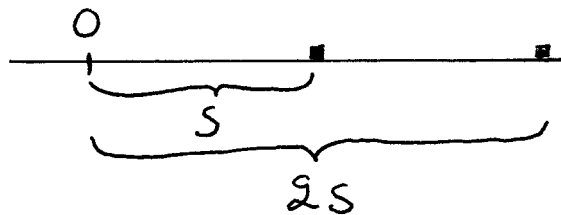
Av symmetriskäl blir spännkraften i den andra linan lika stor.

2. Låt  $v_1$  och  $v'_1$  vara den första partikelns hastighet före respektive efter stöt och  $v'_2$  vara den andra partikelns hastighet efter stöt. Före stöt är den andra partikels hastighet noll. Rörelsemängden bevaras

$$v'_1 + v'_2 = v_1, \quad (5)$$

där vi utnyttjat att partiklarna har samma massa. Definitionen av studsstalet ger

$$\frac{v'_2 - v'_1}{v_1} = e. \quad (6)$$



Ekvation (5) och (6) ger

$$v'_1 = \frac{(1 - e)v_1}{2}, \quad (7)$$

$$v'_2 = \frac{(1 + e)v_1}{2}. \quad (8)$$

Lagen om den kinesiska energin ger

$$-\frac{mv_1'^2}{2} = -\mu N s, \quad (9)$$

$$-\frac{mv_2'^2}{2} = -\mu N 2s, \quad (10)$$

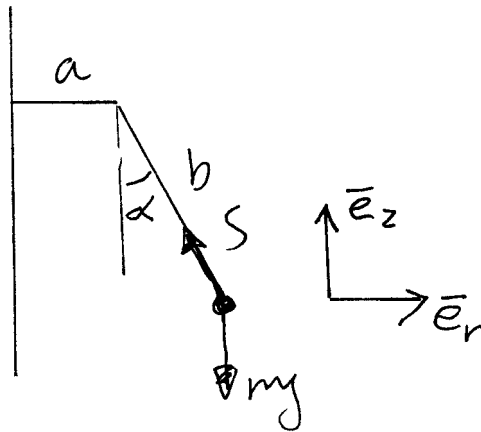
där  $N = mg$  är normalkraften från underlaget. Ekvation (7-10) ger

$$\frac{(1 + e)^2}{(1 - e)^2} = 2 \Rightarrow 1 + e = \sqrt{2}(1 - e) \Rightarrow e = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = 3 - 2\sqrt{2}. \quad (11)$$

3. Newtons andra lag ger:

$$\mathbf{e}_r : m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -S \sin \alpha, \quad (12)$$

$$\mathbf{e}_z : 0 = S \cos \alpha - mg. \quad (13)$$



Ur figuren fås att  $r = a + b \sin \alpha$ . Då  $\dot{\theta} = \omega$  får vi

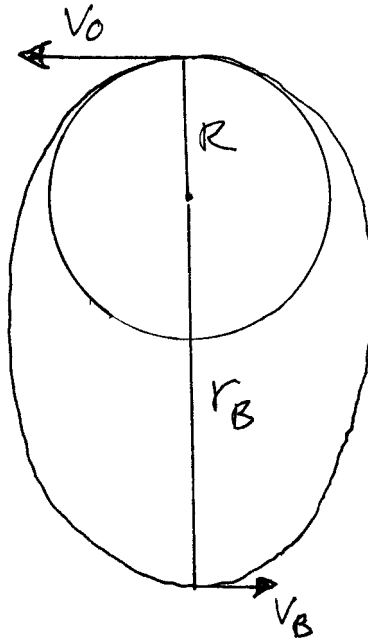
$$m(a + b \sin \alpha)\omega^2 = S \sin \alpha, \quad (14)$$

$$S = \frac{mg}{\cos \alpha}. \quad (15)$$

Detta ger

$$\omega = \sqrt{\frac{g \tan \alpha}{a + b \sin \alpha}}. \quad (16)$$

4. Satelliten kommer att röra sig i en ellips. Låt  $B$  vara punkten längst bort från jordens centrum. Rörelsemängdsmomentets och energins bevarande ger



$$Rv_0 = r_B v_B, \quad (17)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{mgR^2}{R} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{mgR^2}{r_B}. \quad (18)$$

Med  $v_0 = \sqrt{cRg}$ , fås

$$v_B = \sqrt{cRg} \frac{R}{r_B}. \quad (19)$$

Allt instoppat i (18) ger nu

$$\frac{1}{2}cRG - RG = \frac{1}{2}cRG \frac{R^2}{r_B^2} - \frac{gR^2}{r_B} \Rightarrow (2+c)r_B^2 - 2Rr_B + cR^2 = 0 \Rightarrow \quad (20)$$

$$r_B^2 - \frac{2R}{2-c}r_B + \frac{cR^2}{2-c} = 0 \Rightarrow r_B = \frac{R}{2-c} \pm \sqrt{\frac{R^2}{(2-c)^2} - \frac{cR^2}{2-c}} = \quad (21)$$

$$= R \left( \frac{1}{2-c} \pm \sqrt{\frac{c^2 + 1 - 2c}{(2-c)^2}} \right) = R \left( \frac{1}{2-c} \pm \frac{c-1}{2-c} \right). \quad (22)$$

Om vi väljer minustecknet får vi

$$r_B = R, \quad (23)$$

vilket inte kan vara lösningen för det största avståndet eftersom det är lösningen för utgångspunkten som är det minsta avståndet. Alltså måste vi välja plustecknet, vilket ger

$$r_B = \frac{cR}{2 - c}. \quad (24)$$