KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Onsdagen 10 juni, 2015

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Betrakta följande punkter i rummet:

$$A = (-1, 0, 1),\ B = (1, 1, 2) \quad \text{och} \quad C = (0, 0, 2).$$

(a) Ange en parametrisk ekvation för linjen l som går genom B och C. **(1 p)**

(b) Bestäm en ekvation (normalform) för planet π som går genom A och är ortogonalt mot l. **(1 p)**

(c) Bestäm avståndet mellan A och linjen l. **(2 p)**

2. Till varje tal a har vi matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -a \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2a+2 & -2a-4 \end{bmatrix}.$$

(a) För vilka a är matrisen A inverterbar? **(2 p)**

(b) Låt $a = 3$, och bestäm inversen till A. **(2 p)**

3. Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen

$$T(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x + y - z, -3x - y + 2z).$$

(a) Bestäm matrisrepresentation för avbildningen T. **(1 p)**

(b) Bestäm en bas för nollrummet, $\ker(T)$. **(1 p)**

(c) Bestäm dimensionen till bildrummet till T. **(1 p)**

(d) Låt $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Bestäm någon annan punkt Q sådan att $T(P) = T(Q)$. **(1 p)**

DEL B

4. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm ett egenvärde som har två linjärt oberoende egenvektorer. **(2 p)**
(b) Ange alla egenvärden och avgör om matrisen A är diagonaliserbar. **(2 p)**

5. Låt V vara det linjära höljet till vektorerna $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, och låt $V^\perp$ beteckna dess ortogonala komplement.

(a) Bestäm en bas för $V^\perp$. **(2 p)**
(b) Låt $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vara speglingen i V, dvs $T(\vec{x}) = \vec{x}$ om $\vec{x}$ är i V, och $T(\vec{x}) = -\vec{x}$ om $\vec{x}$ är i $V^\perp$. Bestäm $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix})$. **(2 p)**

6. Bestäm en symmetrisk matris A som satisfierar följande.

(a) Egenrummet tillhöranda egenvärdet $\lambda = 2$ är $\begin{bmatrix} 2t & t & -t \end{bmatrix}^T$, godtyckliga tal t.
(b) Egenrummet tillhörande egenvärdet $\lambda = 4$ har dimension två. **(4 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Bestäm den räta linje L som går genom punkten $P = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, och som skär de båda linjerna **(4 p)**

$$L_1 = \{ \begin{bmatrix}3t\\t\\t+1\end{bmatrix} \mid \text{tal } t\} \quad \text{och} \quad L_2 = \{ \begin{bmatrix}s\\s+4\\2s\end{bmatrix} \mid \text{tal } s\}.$$

8. Låt $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{R}^n$ vara en uppsättning delrum till $\mathbb{R}^n$ sådana att V_k har dimension k för varje k och V_{k-1} är ett delrum till V_k för varje $k \geq 2$. En sådan uppsättning delrum kallas en *flagga*. Låt $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning som *stabiliserar* flaggan. Med det menas att för varje $k = 1, 2, \ldots, n$ och för varje vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gäller implikationen $v \in V_k \Rightarrow T(v) \in V_k$. Låt nu $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$ sådana att $\operatorname{span}\{v_1, v_2 \ldots, v_k\} = V_k$ för varje k. Visa att matrisen för T med avseende på basen $v_1, v_2 \ldots, v_n$ är övertriangulär. **(4 p)**

9. Matrisen
$$A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\2 & 8 & 0\\5 & 1 & 6\end{bmatrix}$$
har egenvektorer $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ med tillhörande egenvärden
$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{7+\sqrt{57}}{20}, \quad \text{och} \quad \lambda_3 = \frac{7-\sqrt{57}}{20}.$$
Låt $X = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ vara en vektor med positiva koefficienter $a \geq 0, b \geq 0$ och $c \geq 0$ sådana att $a + b + c = 1$. Bestäm punkten $A^n X$, när $n \to \infty$. **(4 p)**