KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Bedömningskriterier till tentamen
Torsdagen den 4 juni 2015

Allmänt gäller följande:

- För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.
- Om lösningen helt saknar förklarande text, eller motsvarande förklaring i form av logiska symboler, till beräkningar och formler ges högst två poäng. Detta markeras vid bedömningen med FTS (Förklarande text saknas).
- Om lösningen har förklarande text men inte tillräckligt för att det ska gå att förstå alla steg ges högst tre poäng sammanlagt på uppgiften. Detta markeras med FLFT (För lite förklarande text).
- Mindre räknefel ger i allmänhet inte avdrag om de inte ändrar uppgiftens karaktär eller leder till orimligheter som borde ha upptäckts.
- Lösningen ska kunna läsas av en person som inte är insatt i problemet i förväg. Bevisbördan ligger på den som skriver, inte på den som läser.

(1) Funktionen f är definierad på området som ges av olikheterna $x > 1/2$ och $y > 0$ genom

$$f(x, y) = \ln(2x - 1) + \ln(y) - xy - x.$$

(a) Förklara vad det innebär att en punkt är en *stationär punkt*[1] för funktionen f och kontrollera att $(1, 1)$ är en sådan punkt. **(1 p)**
(b) Skriv upp Taylorutvecklingen till f av ordning två i punkten $(1, 1)$. **(2 p)**
(c) Avgör vilken typ den stationära punkten $(1, 1)$ har. **(1 p)**

Bedömning: Uppgiften testar kunskap om begreppet *stationär punkt* och förmågan att beräkna Taylorpolynom och att använda dessa för karaktärisering av stationära punkter.

(a) Korrekt förklaring till vad *stationär punkt* innebär och korrekt kontroll av att $(1, 1)$ är stationär, **1 poäng**.
(b)
- Korrekt beräknade partiella derivator upp till ordning två, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av Taylorpolynomet, **1 poäng**.

(c) Korrekt motiverad slutsats om att $(1, 1)$ är ett lokalt maximum, **1 poäng**.

---

(2) Låt $\mathbf{r}(t)$ beskriva en partikels position i xy-planet där den rör sig moturs med en konstant vinkelhastighet om ω radianer per sekund i en cirkel med radie R kring origo.

(a) Skriv upp uttrycket för $\mathbf{r}(t)$ om partikeln vid tiden $t = 0$ s befinner sig i punkten $(R, 0)$. **(1 p)**
(b) Beräkna derivatan $\mathbf{r}'(t)$ med hjälp av uttrycket från del (a). **(1 p)**
(c) Arbetet som utförs av en kraft $\mathbf{F}(t)$ under rörelsen ges av $\int_C \mathbf{F}(t) \cdot d\mathbf{r}$. Newtons andra lag säger att den kraft som verkar på partikeln är $m\mathbf{r}''(t)$, där m är partikelns massa. Vilket arbete utför denna kraft medan partikeln färdas ett halvt varv kring origo? **(2 p)**

Bedömning: Uppgiften testar förmågan att parametrisera kurvor, att derivera vektorvärda funktioner och att använda detta i ett tillämpat sammanhang.

(a) Korrekt uttryck för $\mathbf{r}(t)$, **1 poäng**.
(b) Korrekt genomförd derivering av $\mathbf{r}(t)$, **1 poäng**.
(c)
- Korrekt beräkning av integranden $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av arbetet, **1 poäng**.

---

[1] En stationär punkt kallas också för en *kritisk punkt*.

(3) Betrakta den kropp K i rummet som ges av olikheterna

$$0 \le z \le x^2 + 4y^2 \qquad \text{och} \qquad x^2 + y^2 \le 1.$$

Volymen av kroppen kan beräknas med trippelintegralen

$$\iiint_K 1\,dV = \iiint_K 1\,dxdydz.$$

(a) Ställ upp den trippelintegral som ger volymen av K med upprepad integration i de rätvinkliga koordinaterna x, y och z. **(1 p)**

(b) Utför det variabelbyte som krävs för att beräkna trippelintegralen från del (a) med hjälp av *cylinderkoordinater*. **(1 p)**

(c) Beräkna volymen av K, exempelvis genom att beräkna trippelintegralen från del (b). **(2 p)**

Bedömning: Uppgiften testar förmågan att beräkna trippelintegraler med variabelbyte och upprepad integration. Speciellt testas förmågan att använda *cylinderkoordinater*.

(a) Korrekt uppställd trippelintegral i de rätvinkliga koordinaterna inklusive integrationsgränser, **1 poäng**.

(b) Korrekt uppställd trippelintegral i cylinderkoordinater inklusive integrationsgränser, **1 poäng**.

(c)
- Principellt korrekt upprepad integration, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av volymen, **1 poäng**.

---

(4) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, yz, y^3 + x^2 z)$ ut genom begränsningsytan till den cylinderformade kropp K som ges av olikheterna

$$x^2 + y^2 \le 1 \quad \text{och} \quad 0 \le z \le 1$$

antingen genom att parametrisera ytans olika delar eller genom att använda divergenssatsen. **(4 p)**

Bedömning: Uppgiften testar förmågan att beräkna flödesintegraler, antingen genom en parametrisering eller genom att använda divergenssatsen. Därigenom testas också förmågan att beräkna trippelintegraler eller dubbelintegraler med upprepad integration.

Vid användade av divergenssatsen:
- Korrekt användning av divergenssatsen, **1 poäng**.
- Korrekt byte till cylinderkoordinater i trippelintegralen, **1 poäng**.
- Korrekt upprepad integration, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av flödet, **1 poäng**.

Vid parametrisering av ytans olika delar:
- Korrekt parametrisering av delarna, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av flödet genom mantelytan, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av flödet genom de båda cirkelskivorna, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av flödet, **1 poäng**.

---

(5) För att flyga med flygbolaget *Lagrangian Airlines* krävs att det incheckade bagagets yttermått skall uppfylla att summan av dess höjd, bredd och djup inte överskrider 150 cm. Bestäm den maximala volym som en rätvinklig parallellepiped kan ha för att få tas med som incheckat bagage. **(4 p)**

Bedömning: Uppgiften testar förmågan att formulera ett matematiskt optimeringsproblem utifrån en given problemställning. Därutöver testas förmågan att lösa ett enklare optimeringsproblem på ett kompakt område där man behöver göra optimering både med och utan bivillkor.

- Korrekt motivering till att maximum måste finnas, **1 poäng**.
- Korrekt undersökning av stationära punkter, **1 poäng**.
- Korrekt användning av Lagranges metod, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad slutsats, **1 poäng**.

---

(6) I en enkel modell av ett gasmoln antas det utanför klotet $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ ha en masstäthet som i lämpliga enheter ges av

$$f(x,y,z) = K\frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Beräkna gasmolnets totala massa. **(4 p)**

Bedömning: Uppgiften testar förmågan att beräkna generaliserade trippelintegraler med sfäriska koordinater.

- Korrekt övergång till sfäriska koordinater, **1 poäng**.
- Principiellt korrekt genomförd upprepad integration, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av massan, **1 poäng**.
- Korrekt motivering till varför den generaliserade integralen konvergerar, **1 poäng**.

---

(7) Låt K vara den homogena kropp som beskrivs av olikheterna

$$z \geq 0, \quad x^2+y^2+z^2 \leq 4 \quad \text{och} \quad z^2 \geq x^2+y^2.$$

Beräkna z-komponenten av masscentrum för kroppen K. **(4 p)**

Bedömning: Uppgiften testar förmågan att använda trippelintegraler för att beräkna masscentrum för en kropp.

- Korrekt metod för att bestämma masscentrum, **1 poäng**.
- Korrekt beräknad volym, **1 poäng**.
- Korrekt beräknad momentintegral , **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av masscentrum, **1 poäng**.

---

(8) Betraka den vektorvärda funktionen $\mathbf{f}$ som ges av

$$\mathbf{f}(x,y) = \left(xy, \frac{x^2-y^2}{2}\right)$$

för alla (x,y) i $\mathbb{R}^2$. Punkten $(x,y) = (\sqrt{3},1)$ är en *fixpunkt* till $\mathbf{f}$, vilket betyder att $\mathbf{f}(\sqrt{3},1) = (\sqrt{3},1)$. För varje positivt heltal n kan vi bilda funktionen $\mathbf{f}_n$ genom att sätta samman $\mathbf{f}$ med sig själv n gånger, dvs $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}\circ\mathbf{f}$, $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}\circ\mathbf{f}\circ\mathbf{f}$, etc.

(a) Bestäm Jacobimatrisen $D\mathbf{f}$ i fixpunkten $(\sqrt{3},1)$. **(1 p)**

(b) Visa att $(\sqrt{3},1)$ är en fixpunkt för alla funktionerna $\mathbf{f}_n$, för $n \geq 1$. **(1 p)**

(c) Bestäm ett uttryck för Jacobimatrisen $D\mathbf{f}_n$ i fixpunkten $(\sqrt{3},1)$ som gäller för alla $n \geq 1$. **(2 p)**

Bedömning: Uppgiften testar förmågan att använda vektorvärda funktioner och Jacobimatriser av vektorvärda funktioner i ett delvis nytt sammanhang som ges i uppgiften.

(a) Korrekt beräkning av Jacobimatrisen , **1 poäng**.

(b) Korrekt motivering till att $(1,\sqrt{3})$ är fixpunkt til $\mathbf{f}_n$ för alla n (formell induktion krävs inte), **1 poäng**.

(c)
- Korrekt uttryck som A^n, **1 poäng**.
- Korrekt mer explicit uttryck, **1 poäng**.

---

(9) Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ där vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y+z, x+z, x+4y)$$

och C är kurvan som ges av

$$\mathbf{r}(t) = (t\cos(1-t^2),\, t^2,\, t), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

(4 p)

Bedömning: Uppgiften testar förmågan att beräkna kurvintegraler där delvis nya angreppssätt krävs.

- Korrekt uppdelning av fältet i ett konservativt fält och ett enklare fält, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av kurvintegralen för det konservativa fältet, **1 poäng**.
- Korrekt beräkning av kurvintegralen för det resterande fältet, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av den ursprungliga kurvintegralen, **1 poäng**.
