KTH Informations- och kommunikationsteknik

Omtentamen i
IE1304 Reglerteknik
Fredag 12/06 2015 08.00-12.00

Allmän information

Examinator: William Sandqvist.

Ansvarig lärare: William Sandqvist, tel 08-790 4487 (Campus Kista),
Tentamensuppgifterna behöver inte återlämnas när du lämnar in din skrivning.

Hjälpmedel: Räknare/Grafräknare. Kursens formelblad har bifogats tentamen.

Tentamens omfattning

14 uppgifter. 9 st 2p, 1st 4p, 2st 6p, 2st 8p.

Information om rättning och betyg

Motivera alla svar.

Tabeller och beräkningar som använts ska finnas med i lösningarna i läsbar form. Om svaret på en fråga är "42" så måste du också tala om varför.

Ofullständigt motiverade svar ger *inte* full poäng!

Tentamen kan ge maximalt 50 p, godkändgränsen går vid 25 p.

0 –	25 –	30 –	35 –	40 –	45–
F	E	D	C	B	A

Resultatet meddelas senast fredag den 3 juli.

---

1. 2p

a) Vilken överföringsfunktion $\frac{Y}{X}$ har denna differentialekvation?

$$4(\ddot{y}+3\dot{y}+\dot{x})+8\ddot{x}=0$$

b) Vilken överföringsfunktion $\frac{Y}{X}$ har denna Dödtids-process?

$$y'(t)+y(t)=2x(t-10)$$

2. 2p

Vilket stegsvar har följande överföringsfunktion? Använd Laplacetransform tabellen.
$x(\ t > 0\ ) = 1$. $y(t) = ?$

$$G(s)=\frac{Y}{X}=\frac{3}{s^2+9}$$

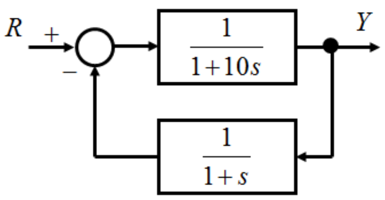
3. 2p

Partialbråksutveckla följande polynom

$$G(s)=\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

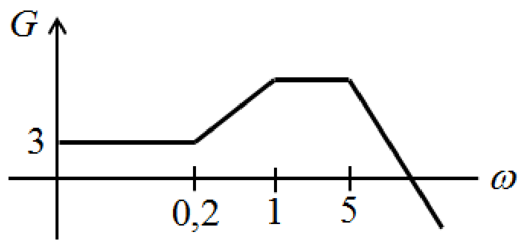
4. 4p

Feedback. En process har överföringsfunktionen $\frac{1}{1+10s}$ och återkopplas med överföringsfunktionen $\frac{1}{1+1s}$ enligt figuren. Vad blir överföringsfunktionen för $\frac{Y}{R}$?
Förenkla så långt det går!



5. 2p

Bodediagram. Ange den överföringsfunktion som överensstämmer med följande Bode-diagram.
Där kurvans första lutning är +1 dekad/dekad, den avslutande lutningen är -2 dekad/dekad.



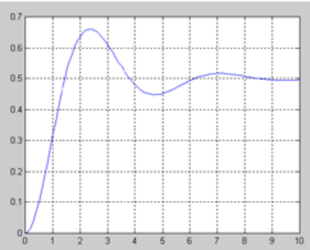
6. 2p

Använd Rooth Hurwitz metod för att avgöra för vilka värden på K som nämnarpolynomet är stabilt.

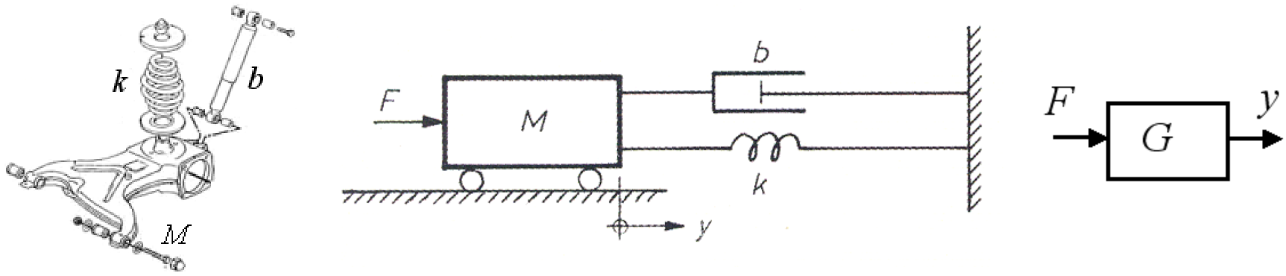
$$s^3 + 3s^2 + s + K$$

7. 2p

Mät i figuren (på svarsbladet, lämna in detta), och markera där hur man mäter översläng M_P [%] och t_P [s]. Mät, och markera hur man mäter, settlingtime t_s (±5%) [s].

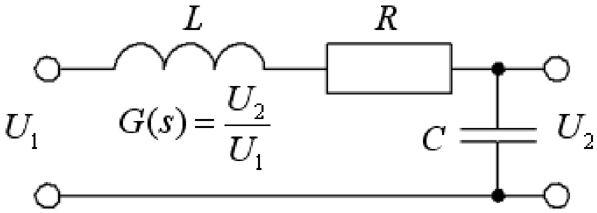


8. 6p



Hjulupphängningen på personbilar består av en fjäder med fjäderkonstanten k, en stötdämpare med dämpkonstanten b och hjulet med massan M. Systemet kan jämföras med principfiguren i mitten av figuren (vi bortser här från tyngdkraftens inverkan på hjulet).

a) Tag fram överföringsfunktionen $G(s)$ mellan positionen y och kraften F.

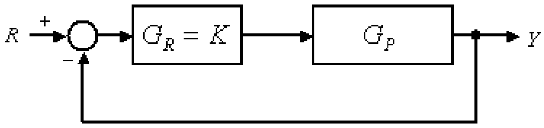


Samma överföringsfunktion (bortsett från en multiplikativ konstant) kan man få med elektriska komponenter C L R som lågpass filtret $G(s) = U_2/U_1$.

b) Tag fram överföringsfunktionen $G(s)$ mellan spänningen U_2 och spänningen U_1.

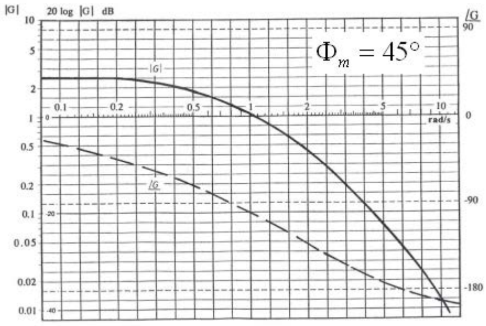
c) Vilken av komponenterna C L och R är det som motsvarar respektive M b och k?

9. 8p



En process G_P har Bode-diagrammet enligt figuren (tydligare på på svarsbladet, så lämna in detta). Man vill reglera denna med en P-regulator $G_R = K$.

a) Bestäm det K som ger fasmarginalen 45° och rita in $G_R \cdot G_P$ i Bodediagrammet.



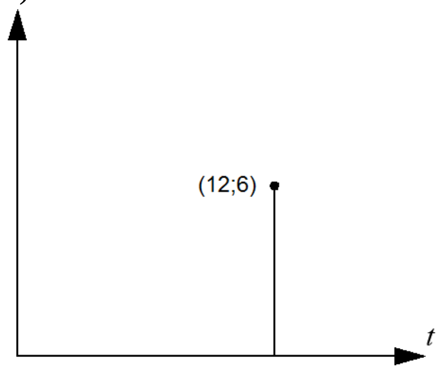
b) Vilken stigtid t_{rGP} [s] har den reglerade processen?

c) Hur stort blir kvarvarande felet e_0 hos den reglerade processen efter en börvärdesändring med a = 5 enheter.

d) Hur stort blir det kvarvarande felet e_1 hos den reglerade processen efter en rampformad börvärdesändring med h = 5 enheter/tidsenhet? Föreslå åtgärd för att förbättra detta!

10. 2p

a) Bestäm z-transformen för denna tidsdiskreta signal. Ange den på både negativ och positiv form.



b) Bestäm tidsdiskreta motsvarigheterna till

$$G(s) = 12 \quad G(s) = \frac{12}{s-6}$$

11. 2p

Avgör om nedanstående tidsdiskreta system är stabilt.

$$H(z) = \frac{0{,}6z}{z^2 - 0{,}6z + 0{,}12}$$

12. 8p

En process ska regleras med icke-integrerande polplacerings regulator. Processen beskrivs med följande differensekvation

$y[k] = 0.6\, y[k-1] + 12\, u\, [k-1]$

a) Bestäm överföringsfunktionen (1p)

b) Dimensionera regulatorn och anta att alla poler ska ligga i origo. (3p)

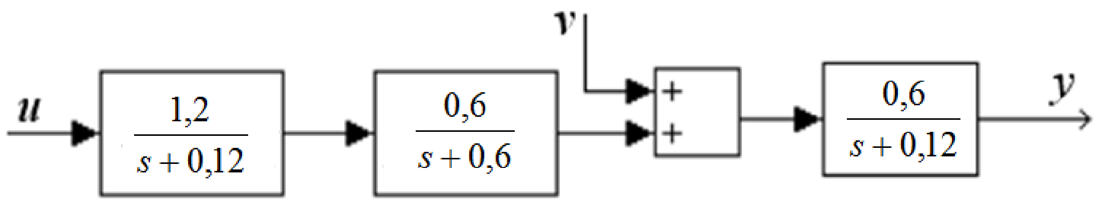
c) Rita blockschema för hela systemet. (1p)

d) Vilka ändringar behövs för att placera ovanstående regulatorn till en stor kemisk fabrik för reglering av inflöde av mycket explosiv gas? Föreslå en möjlig överföringsfunktion för denna regulator. (2p)

e) Diskutera användning av regulatorer för reglering av kritiska system. Vilka regulatorer är mer lämpliga än andra? I vilka situationer? (1p)

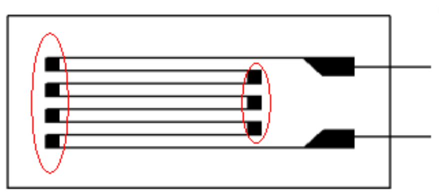
13. 6p

En process beskrivs med nedanstående blockschema. Signalen *u* är styrsignal, *v* är reglerad storhet och *y* är mätsignal.



a) ställ upp systemet på tillståndsform. (4p)
b) beräkna stationärvärde av tillståndssystemet från a). (2p)

14. 2p



Figuren visar en folietöjningsgivare. Den klistras på ett underlag och kommer då att töjas tillsammans med detta, töjningen ger då upphov till en obetydlig resistansändring hos givaren.
a) Hur kan man mäta denna obetydliga resistansändring? Vilket mäthjälpmedel brukar man använda?
a) Nämn någon storhet, förutom töjning, som man brukar mäta med töjningsgivare?
b) Varför är kortsidornas ledare utformade med ”fetare” ledningsmönster (rött i figuren)?

Lycka till!

Formelblad vid tentamen i Reglerteknik IE1304

Regulatortyper

Regulator	Funktion	Överföringsfunktion $G(s)$
P-regulator	$u(t) = u_0 + K \cdot e(t)$	$G(s) = K$
I-regulator	$u(t) = \frac{1}{T_I}\int_0^t e(t)dt$	$G(s) = \frac{1}{T_I s}$
D-länk	$u(t) = T_D \frac{de(t)}{dt}$	$G(s) = T_D \cdot s$
PID-regulator	$u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e(t)dt + T_D \frac{de(t)}{dt}\right)$	$G(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$
$u(k) = K\left(e(k) + \frac{h}{T_I}\sum_{i=0}^{k} e(i) + T_D \frac{e(k) - e(k-1)}{h}\right)$ Diskret PID, förutsätter hög samplingsfrekvens		
h = samplingsperiod K = förstärkning T_I = integreringstid T_D = deriveringstid		

Laplacetransformtabell

Laplacetransform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$ $t > 0$	Laplacetransform $F(s)$	Tidsfunktion $f(t)$ $t > 0$
1	$\delta(t)$ impulsfunktionen	$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$ stegfunktionen
$\frac{1}{s^2}$	$1 \cdot t$ rampfunktionen	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$
$\frac{1}{s(1+as)}$	$1 - e^{-\frac{t}{a}}$	$\frac{1}{s(1+as)(1+bs)}$	$1 - \frac{a \cdot e^{-at}}{a-b} - \frac{b \cdot e^{-bt}}{b-a}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \cdot \sin at$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{1}{a^2}[1 - \cos at]$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \cdot \cos bt$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \cdot \sin bt$

Dämpsatsen: $e^{-\alpha t} \cdot f(t) \Leftrightarrow F(s+\alpha)$

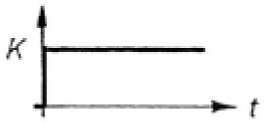
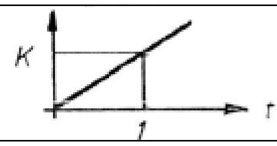
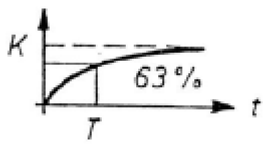
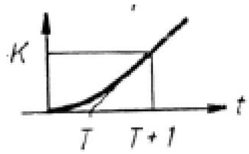
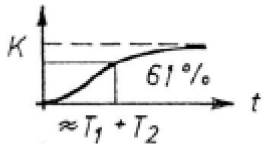
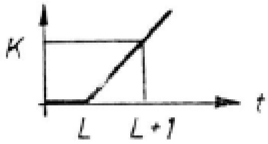
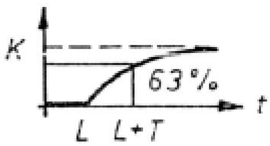
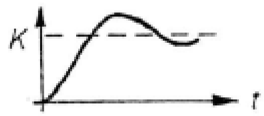
Fördröjningssatsen: $f(t-T) \cdot \sigma(t-T) \Leftrightarrow e^{-sT} \cdot F(s)$

Begynnelsevärdessatsen: $\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot F(s)$

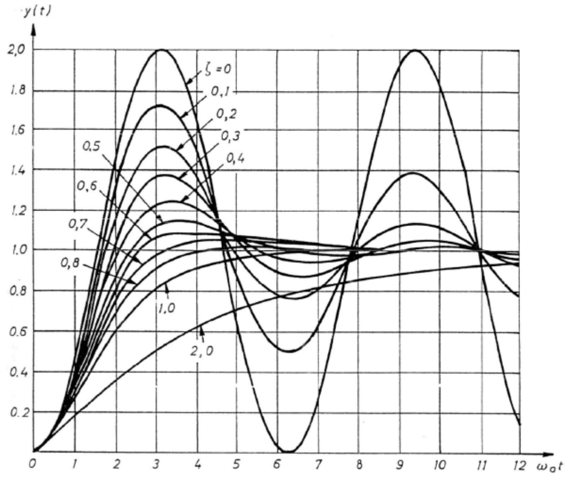
Slutvärdessatsen: $\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0^+} s \cdot F(s)$

Deriveringssatsen:	$L\left[f'(t)\right] = s \cdot F(s) - f(0)$
Integrationssatsen:	$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s} \cdot F(s)$
Superpositionsregeln:	$L\left[a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)\right] = a \cdot F_1(s) + b \cdot F_2(s)$

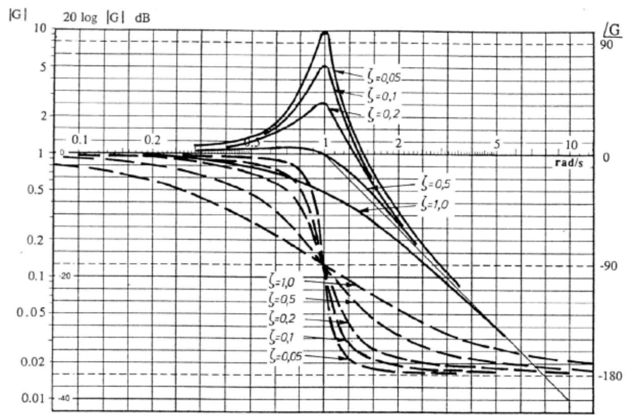
Samband mellan stegsvar och överföringsfunktion

P-verkan $G(s) = K$		Integration $G(s) = \frac{K}{s}$	
En tidkonstant $G(s) = \frac{K}{1+Ts}$		Integration+tidkonstant $G(s) = \frac{K}{s(1+Ts)}$	
Två tidkonstanter $G(s) = \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}$		Integration+dödtid $G(s) = \frac{K \cdot e^{-Ls}}{s}$	
En tidkonstant+dödtid $G(s) = \frac{K \cdot e^{-Ls}}{1+Ts}$		Andra ordningens process med översväng $G(s) = \frac{K}{as^2 + bs + 1}$	

Andra ordningens system med komplexa rötter



Linjärt



Bode-diagram

ω_0 odämpade systemets egensvängning

ζ relativ dämpning

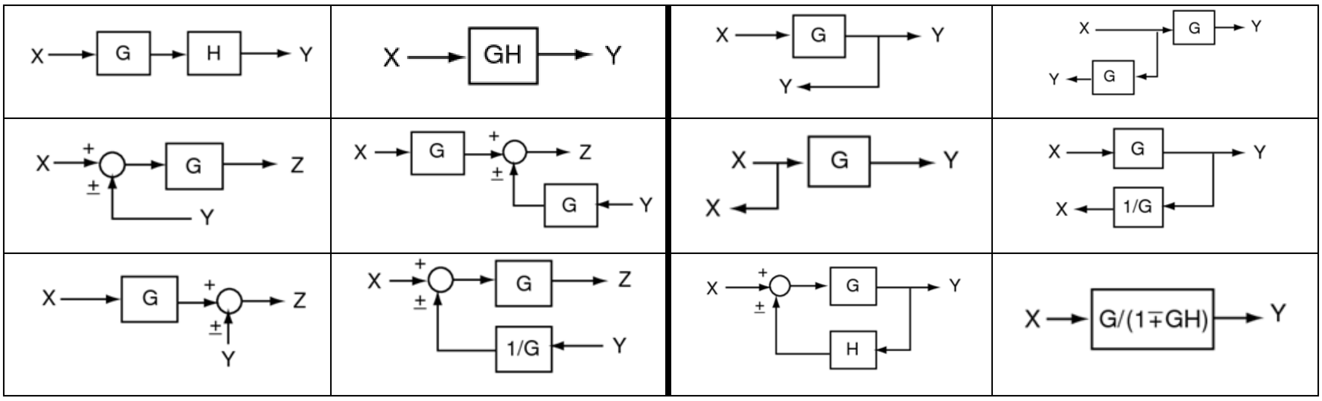
M_P maximal översväng

t_P tiden för maximal översväng

$$G(s) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$M_P = e^{-\frac{\zeta \cdot \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \qquad t_P = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Blockschema reduktions regler



Fysikaliska modeller

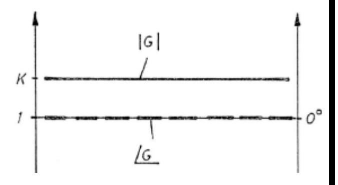
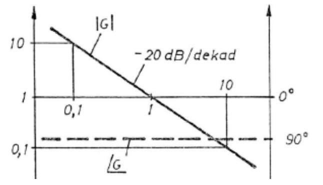
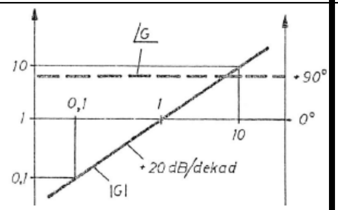
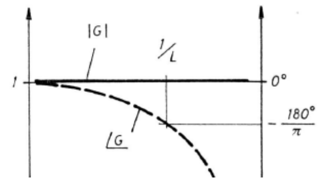
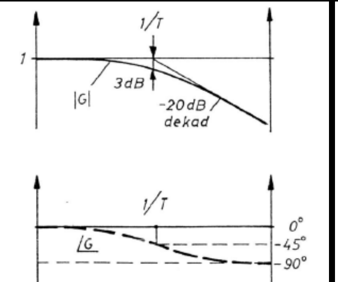
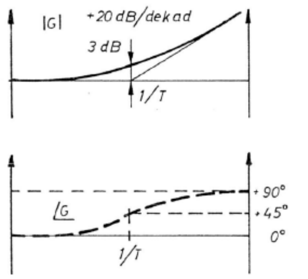
Mekaniska system	Elektriska system
Massa $\sum F = M\dfrac{d^2x}{dt}$ (Newtons andra lag) Fjäder $F = k \cdot x$ (k = fjäderkonstant) Dämpare $F = b\dfrac{dx}{dt}$ (b = dämpkonstant)	Resistor $\dfrac{U}{I} = R$ (R = resistans) Kondensator $\dfrac{U}{I} = \dfrac{1}{C \cdot s}$ (C = kapacitans) Spole $\dfrac{U}{I} = L \cdot s$ (L = induktans)
Termisk process	Nivåreglering
Energibalans $\dfrac{dE}{dt} = P_{in} - P_{ut}$ Värmeenergi $E = T \cdot V \cdot c \cdot \rho$ T temperatur [K] V volym [m^3] c värmekapacitet [J/K·kg] ρ densitet [kg/m^3]	Materialbalans $\dfrac{dV}{dt} = u_{in} - u_{ut}$ V volym [m^3] u_{in} inflöde [m^3/s] u_{ut} utflöde [m^3/s]

Frekvensanalys

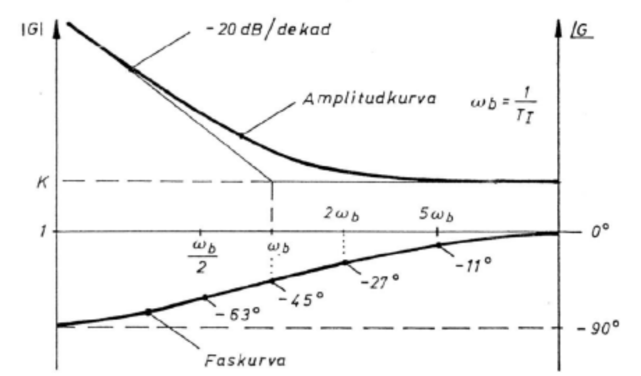
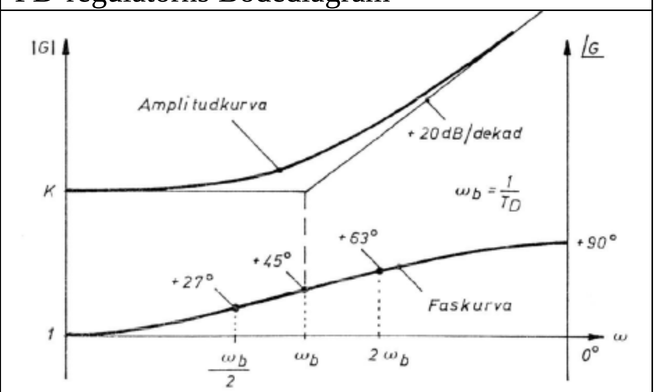
$G(s)$

$A(\omega) = \left|\underline{G}(j\omega)\right| \quad \varphi(\omega) = \arg\left(\underline{G}(j\omega)\right) \quad \angle\underline{G}(j\omega) \qquad PHASOR \;\; A\angle\varphi$

Bodediagram för grundfaktorer

Förstärkning $G(s) = K$ $\lvert \underline{G}(j\omega) \rvert = K$ $\arg(\underline{G}(j\omega)) = 0°$		Integrering $G(s) = \frac{1}{s}$ $\lvert \underline{G}(j\omega) \rvert = \frac{1}{\omega}$ $\arg(\underline{G}(j\omega)) = -90°$	
Derivering $G(s) = s$ $\lvert \underline{G}(j\omega) \rvert = \omega$ $\arg(\underline{G}(j\omega)) = +90°$		Dödtid $G(s) = e^{-L \cdot s}$ $\lvert \underline{G}(j\omega) \rvert = 1$ $\arg(\underline{G}(j\omega)) = -\omega \cdot L \frac{180°}{\pi}$	
Tidkonstant nämnare $G(s) = \frac{1}{1+Ts}$ $\lvert \underline{G}(j\omega) \rvert = \frac{1}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}$ $\arg(\underline{G}(j\omega)) = -\arctan T\omega$		Tidkonstant täljare $G(s) = \frac{1+Ts}{1}$ $\lvert \underline{G}(j\omega) \rvert = \frac{\sqrt{1+(T\omega)^2}}{1}$ $\arg(\underline{G}(j\omega)) = \arctan T\omega$	
$G(s) = \frac{1}{1+2\zeta Ts+T^2 s}$ $\quad \lvert \underline{G}(j\omega) \rvert = \frac{1}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\zeta T\omega)^2}}$ $\quad \arg(\underline{G}(j\omega)) = -\arctan\left(\frac{2\zeta T\omega}{1-T^2\omega^2}\right)$			

PI och PD-regulatorernas Bodediagram

PI-regulatorns Bodediagram	PD-regulatorns Bodediagram
	

PI-regulator. Dimensionera med fasmarginal $\phi_m + 11°$. Regulatorns Bodediagram placeras med sitt $5\omega_b$ vid $\phi_m + 11°$. Totalt uppnås då den önskade fasmarginalen ϕ_m.

Stabilitet

Nyquist förenklade stabilitets kriterium för öppna systemet. Stabilt om:

$\lvert \underline{G}(j\omega) \rvert < 1 \quad \text{vid} \quad \arg(\underline{G}(j\omega)) = -180°$

Agebraiskt. Stabilt om: *Slutna systemets* poler ligger i vänstra halvplanet.

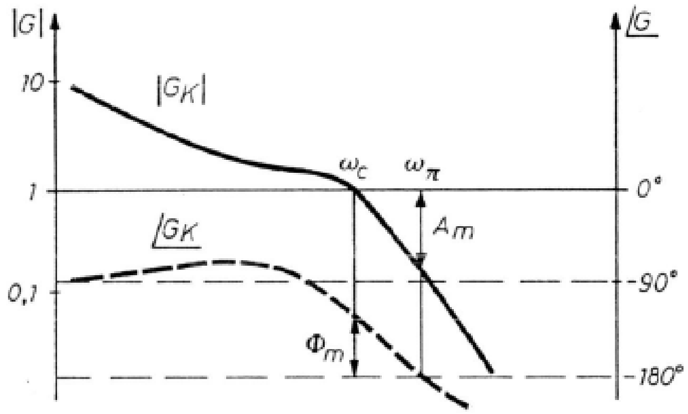
Stabilitetsmarginaler

ω_π självsvängningsfrekvens där $\arg(\underline{G}(j\omega)) = -180°$

ω_c crossover frekvens där $|\underline{G}(j\omega)| = 1$

A_m amplitud marginal $A_m = \dfrac{1}{|G(\omega_\pi)|}$

ϕ_m fasmarginal $\phi_m = 180° + \arg(\underline{G}(j\omega_c))$



Routh Hurwitz metod

Karakteristisk ekvation:

$B_0 s^n + B_1 s^{n-1} + B_2 s^{n-2} + \ldots + B_n = 0 \quad B_0 > 0$

Talschema:

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
s^n & B_0 & B_2 & B_4 & B_6 & \ldots \\
s^{n-1} & B_1 & B_3 & B_5 & B_7 & \ldots \\
\hline
s^{n-2} & C_0 & C_1 & C_2 & \ldots & \\
s^{n-3} & D_0 & D_1 & D_2 & \ldots & \\
\vdots & \vdots & & & & \\
s^0 & & & & &
\end{array}
$$

där $C_0 = \dfrac{B_1 B_2 - B_0 B_3}{B_1}$

$C_1 = \dfrac{B_1 B_4 - B_0 B_5}{B_1}$

$C_2 = \dfrac{B_1 B_6 - B_0 B_7}{B_1}$

$D_0 = \dfrac{C_0 B_3 - B_1 C_1}{C_0}$

etc

Om alla tal i första kolumnen är positiva har karakteristiska ekvationen alla rötter i vänster halvplan.

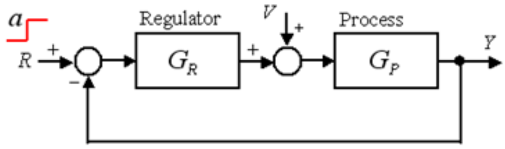
Kvarstående reglerfel, statisk noggrannhet

e_0 stegformad börvärdesändring
a steghöjd

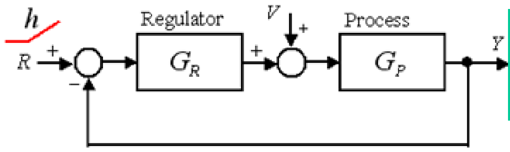
e_1 rampformad börvärdesändring
h rampens lutning

e_v stegstörning
a steghöjd

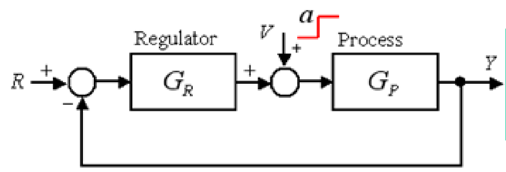
Snabbhet stigtiden $t_r \approx \frac{1{,}4}{\omega_c}$



$$e_0 = \lim_{s \to 0} \frac{a}{1 + G_R \cdot G_P}$$



$$e_I = \lim_{s \to 0} \frac{h}{s \cdot (1 + G_R \cdot G_P)}$$



$$e_v = \lim_{s \to 0} \frac{-G_P \cdot a}{1 + G_R \cdot G_P}$$

Ziegler-Nichols metod för PID-inställning

K_0 är den förstärkning då självsvängning uppkommer vid P reglering.

$$K_0 = \frac{1}{|G(\omega_\pi)|} \qquad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_\pi}$$

	K	T_I	T_D
$P:$	$0{,}5 \cdot K_0$	$-$	$-$
$PI:$	$0{,}45 \cdot K_0$	$0{,}85 \cdot T_0$	$-$
$PID:$	$0{,}6 \cdot K_0$	$0{,}5 \cdot T_0$	$0{,}125 \cdot T_0$

Lambdametoden för PI-inställning

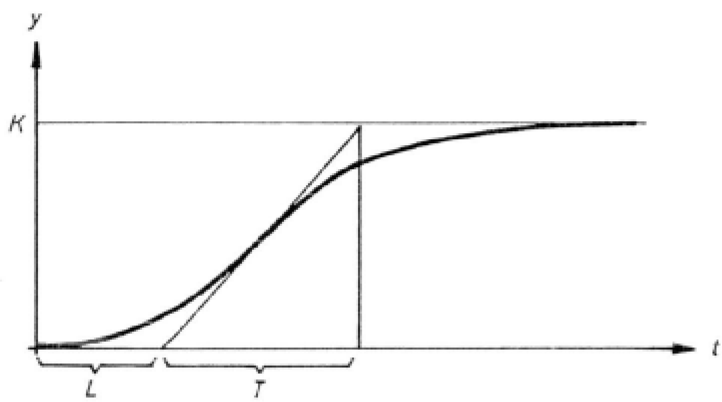
Vid lambdametoden mäts stegsvaret från det öppna systemet och jämförs med stegsvaret från en process med en tidkonstant T och dödtid L.

$$G(s) = \frac{K \cdot e^{-Ls}}{1 + Ts}$$

L uppskattas med hjälp av tangentens skärning med tidaxeln.

T uppskattas ur triangeln i figuren, eller som tiden efter dödtiden L, fram till 63% av slutvärdet.

$$K = \frac{T}{K_S(\lambda + L)} \qquad T_I = T$$



$$M = \max\{L, T\} \qquad \lambda = p \cdot M$$

$$1 < p < 3 \quad (speed \leftarrow p \rightarrow stability)$$

z-transformtabell

Tidsdiskret funktion $f(k)$	z-transform $F(z)$ pos repr.	z-transform $F(z)$ neg repr.
$P_e(k)$ enhetspuls	1	
$S_e(k)$ enhetssteg	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
$f(k)=1\cdot k$ enhetsramp	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$
$f(k)=(1\cdot k)^2$ enhetsparabel	$\frac{z^2+z}{(z-1)^3}$	$\frac{z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$
$f(k)=a^k$ exponentialfunktion	$\frac{z}{z-a}$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$
$P_e(k-L)$ fördröjd puls	$\frac{1}{z^L}$	z^{-L}
$S_e(k-L)$ fördröjt steg	$\frac{z^{1-L}}{z-1}$	$\frac{z^{-L}}{1-z^{-1}}$
$f(k)=e^{-ak}$	$\frac{z}{z-e^{-a}}$	$\frac{1}{1-e^{-a}z^{-1}}$
$f(k)=\sin\omega k$	$\frac{z\cdot\sin\omega}{z^2-(2\cos\omega)z+1}$	$\frac{z^{-1}\cdot\sin\omega}{1-(2\cos\omega)z^{-1}+z^{-2}}$
$f(k)=\cos\omega k$	$\frac{z(z-\cos\omega)}{z^2-(2\cos\omega)z+1}$	$\frac{z^{-1}(1-z^{-1}\cos\omega)}{1-(2\cos\omega)z^{-1}+z^{-2}}$
$f(k)=1-e^{-ak}$	$\frac{z(1-e^{-a})}{(z-1)(z-e^{-a})}$	$\frac{(1-e^{-a})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-a}z^{-1})}$
Superpositionsregeln: $Z\left[a\cdot f_1(k)+b\cdot f_2(k)\right]=a\cdot F_1(z)+b\cdot F_2(z)$ Förskjutningssatsen: $Z\left[f(k-L)\right]=F(z)\cdot z^{-L}$ Begynnelse och slutvärdessatserna: $f(0)=\lim_{s\to\infty}F(z)$ $\quad \lim_{k\to\infty}f(k)=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot F(z)$		

Diskretisering

Diskretisering med formel

$$H(z)=(1-z^{-1})\cdot Z\left[L^{-1}\left(G(s)\cdot\frac{1}{s}\right)_{t=kh}\right]$$

h är samplingsperioden. Steginvariant transform.

Diskretisering med tabell

Kontinuerlig process $G(s)$	Diskretiserad process $H(z)$
$\frac{K}{1+Ts}$	$\frac{K(1-e^{-h/T})}{z-e^{-h/T}} = \frac{K(1-e^{-h/T})z^{-1}}{1-e^{-h/T}z^{-1}}$
$\frac{K}{s}$	$\frac{K\cdot h}{z-1} = \frac{K\cdot h\cdot z^{-1}}{1-z^{-1}}$
e^{-hs}	z^{-1}
$\frac{K}{s(1+Ts)}$	$KT\cdot\frac{(e^{-h/T}-1+\frac{h}{T})z^{-1}+(1-e^{-h/T}(1+\frac{h}{T}))z^{-2}}{1-(1+e^{-h/T})z^{-1}+e^{-h/T}z^{-2}}$
$\frac{K}{s^2+a^2}$	$\frac{K(1-\cos ah)}{a^2}\cdot\frac{(z^{-1}+z^{-2})}{(1-2\cos ah\, z^{-1}+z^{-2})}$
$\frac{K}{s^2}$	$\frac{Kh^2}{2}\cdot\frac{(z^{-1}+z^{-2})}{(1-2z^{-1}+z^{-2})}$

Lineär algebra några formler

Multiplikation av 2×2-matriser:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Enhetsmatrisen:

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Invertering av en 2×2-matris:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Determinanten för en 2×2-matris:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

Minsta kvadratmetoden

Överbestämt ekvationssystem $y = A\cdot r$

Felutjämnat $A^T y = (A^T A)r \quad \Rightarrow \quad r = (A^T A)^{-1}A^T y$ Matlab `r = A\y`

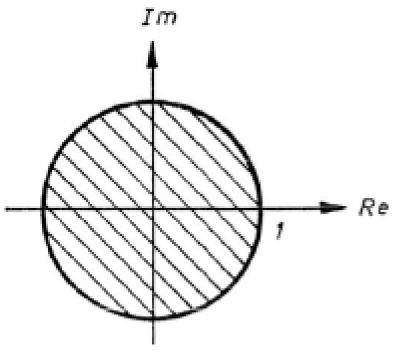
y utsignalvektor
A mätdata matrisen
r parametervektor

Diskret frekvensanalys

$H(z) \qquad A(\omega)=\left|\underline{H}(e^{j\omega h})\right| \qquad \varphi(\omega)=\arg\left(\underline{H}(e^{j\omega h})\right) \qquad K_{LF}=H(1) \qquad f_S=\frac{1}{h} \qquad f_S\geq 2\cdot f$

Samplingsfrekvensen måste vara minst dubbelt så hög som högsta insignalfrekvensen för att undvika vikningsdistorsion.

Diskret stabilitet

<table>
<tr>
<td>


För stabilitet ska överföringsfunktionen $H(z)$ ha alla poler inom enhetscirkeln.
</td>
<td>
Schur-Coons stabilitetskriterium (motsvarar Rooth Hurwitz). Karakteristisk ekvation:

$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n \quad a_0 > 0$

Talschema:

$b_i = a_0 a_i - a_n a_{n-i} \qquad 0 \le i \le n-1$
$c_i = b_0 b_i - b_{n-1} b_{n-1-i} \qquad 0 \le i \le n-2$
$d_i = c_0 c_i - c_{n-2} c_{n-2-i} \qquad 0 \le i \le n-3$
$\ldots$

Stabilt om

a_0, b_0, c_0, … alla är positiva
</td>
</tr>
</table>

Kvarstående reglerfel, statisk noggrannhet

e_0 stegformad börvärdesändring $\quad e_0 = \lim_{z \to 1} \dfrac{a}{1 + H_R H_P}$

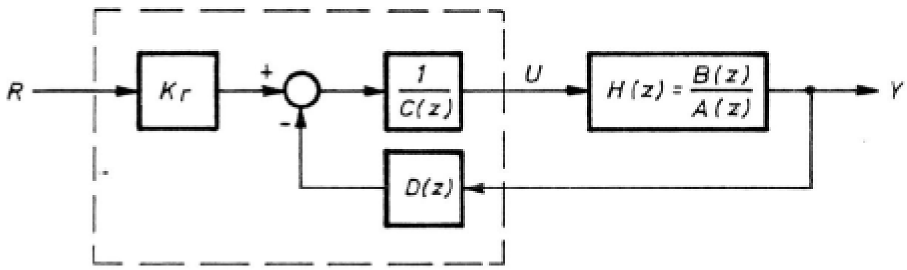
a steghöjd

e_1 rampformad börvärdesändring $\quad e_1 = \lim_{z \to 1} \dfrac{h}{(z-1)(1 + H_R H_P)}$

h rampens lutning

e_v stegstörning *a* steghöjden $\quad e_v = \lim_{z \to 1} \dfrac{-H_P a}{1 + H_R H_P}$

Polplaceringsregulator



$$P(z) = (1 - p_1 z^{-1})(1 - p_1 z^{-1}) \ldots (1 - p_n z^{-1})$$

$A(z)C(z) + B(z)D(z) = P(z)$ vid integrering $(1 - z^{-1})$ i C, under beräkningen enklast i A.

$$n_p \le n_a + n_b - 1 \quad n_c = n_b - 1 \quad n_d = n_a - 1$$

$$C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \ldots + c_{n_c} z^{-n_c}$$

$$D(z) = d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \ldots + d_{n_d} z^{-n_d} \qquad K_r = \frac{P(1)}{B(1)}$$

Tillståndsmodeller för kontinuerliga system

Systembeskrivning: **x**'=**Ax**+**B**u y=**Cx**

A systemmatris **B** insignalmatris **C** utsignalmatris **D** direktmatris

Generell form för enkelvariabla system

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \cdot u \qquad y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \end{bmatrix} \cdot u$$

Generell form för flervariabla system. n tillståndsvariabler, p insignaler, q utsignaler.

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Diagonalform

$$G(s): \quad \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} \quad \equiv \quad \frac{\beta_1}{s-\lambda_1} + \frac{\beta_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \frac{\beta_n}{s-\lambda_n}$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \cdot u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Styrbar kanonisk form

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \qquad y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Transformera tillståndsmodell till överföringsfunktion

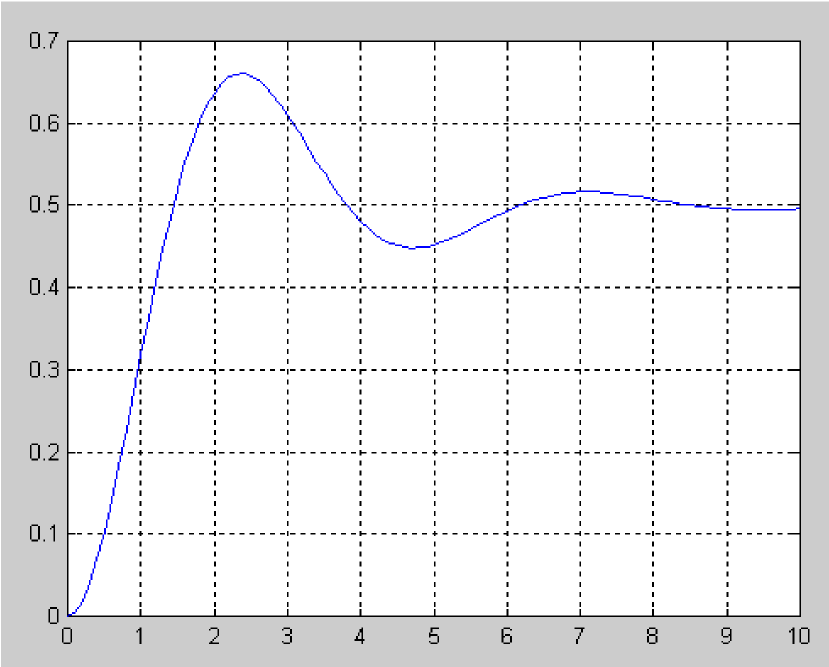
x'=**Ax**+**B***u* *y*=**Cx** {L:} *s***X**=**AX**+**B***U* *Y*=**CX**

$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$

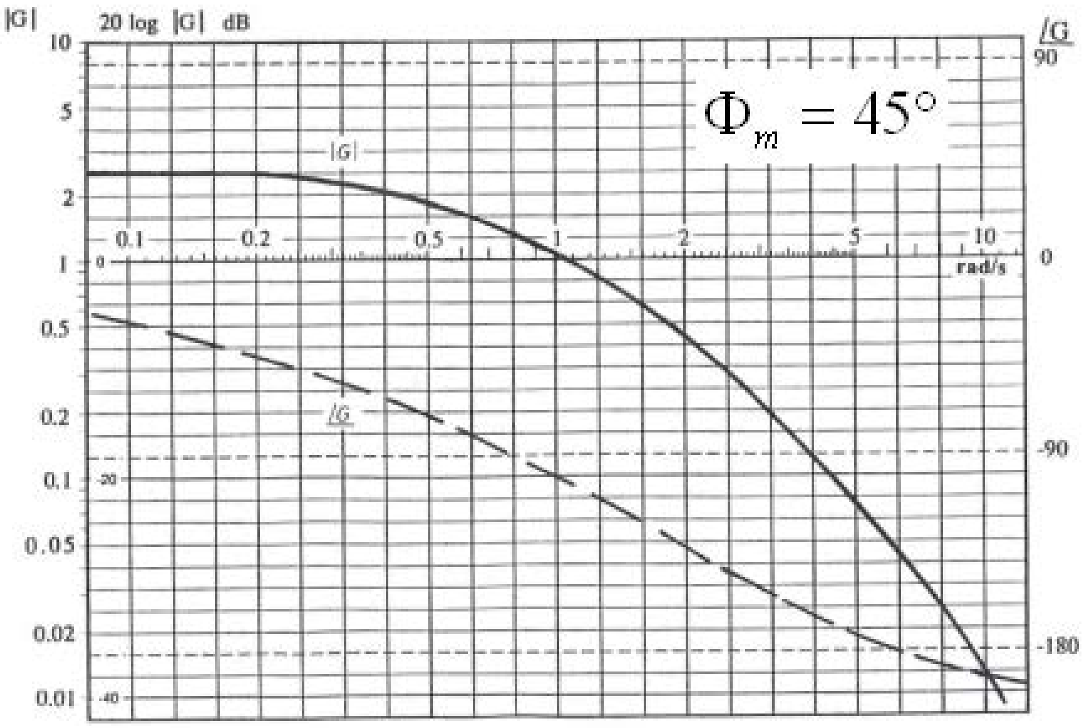
Figurblad till uppgifterna 7, 9

Efternamn: ______________________________ **Förnamn:** ________________________________

Personnummer: ______________________________



Uppg. 7. M_P t_P t_s (±5%)



K = ? t_{rGP} = ? e_0 = ? e_1 = ?

Uppg 9.