KTH Informations- och kommunikationsteknik

Tentamen med lösningar i IE1304 Reglerteknik Måndag 16/3 2015 9.00-13.00

Allmän information

Examinator: William Sandqvist.

Ansvarig lärare: William Sandqvist, tel 08-790 4487 (Campus Kista),
Tentamensuppgifterna behöver inte återlämnas när du lämnar in din skrivning.

Hjälpmedel: Räknare/Grafräknare. Kursens formelblad har bifogats tentamen.

Tentamens omfattning

Information om rättning och betyg

Motivera alla svar.

Tabeller och beräkningar som använts ska finnas med i lösningarna i läsbar form. Om svaret på en fråga är "42" så måste du också tala om varför.

Ofullständigt motiverade svar ger *inte* full poäng!

Tentamen kan ge maximalt 50 p (denna gång 56p), godkändgränsen går vid 25 p.
Vid detta **ordinarie tentamenstillfälle** kan upp till 6 extra poäng läggas till från denna **kursomgångs** tre seminarier (2+2+2). Totalt 56p.

0 –	25 –	30 –	35 –	40 –	45–
F	E	D	C	B	A

Resultatet meddelas senast måndag den 6 april.

1. 2p

a) Vilken överföringsfunktion $\frac{Y}{X}$ har denna differentialekvation?

$$y''-3y'+2y = 3x'+x$$

b) Vilken överföringsfunktion $\frac{Y}{X}$ har denna PID-regulator?

$$y = x + 5\int xdt + 2\dot{x}$$

Svar:

a) $L[y''-3y'+2y] = L[3x'+x] \quad \Rightarrow \quad \frac{Y}{X} = \frac{3s+1}{s^2-3s+2}$

b) $L[y] = L\left[x + 5\int xdt + 2\dot{x}\right] \quad \Leftrightarrow \quad Y = X + \frac{5}{s}X + 2sX$

$$\frac{Y}{X} = 1 + \frac{5}{s} + 2s$$

2. 2p

Vilket stegsvar har följande överföringsfunktion? Använd Laplacetransform tabellen.
$x(\ t > 0\ ) = 1$. $y(t) = ?$

$$G(s) = \frac{Y}{X} = \frac{1}{s^2+4}$$

Svar:

$$Y = G(s)X \qquad X = L[unitstep] = \frac{1}{s}$$

$$Y = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s^2+4)} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{4}(1-\cos 2t)$$

3. 2p

Partialbråksutveckla följande polynom

$$G(s) = \frac{9-3s}{(s+1)(s+7)}$$

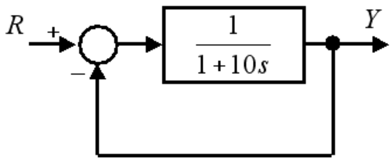
Svar:

$$\frac{9-3s}{(s+1)(s+7)} = \frac{\frac{9-3(-1)}{(-1)+7}}{s+1} + \frac{\frac{9-3(-7)}{(-7)+1}}{s+7} \qquad G(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{-5}{s+7}$$

4. 4p

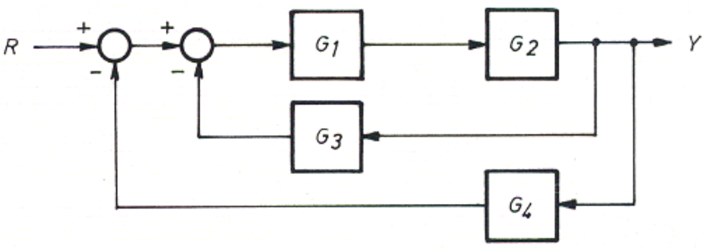
a) Feedback. En process har överföringsfunktionen $\frac{1}{1+10s}$.

Den återkopplas enligt figuren. Vad blir överföringsfunktionen för $\frac{Y}{R}$?



b) Blockschemareduktion.

Reducera blockschemat till överföringsfunktionen för $\frac{Y}{R}$ så långt det går.



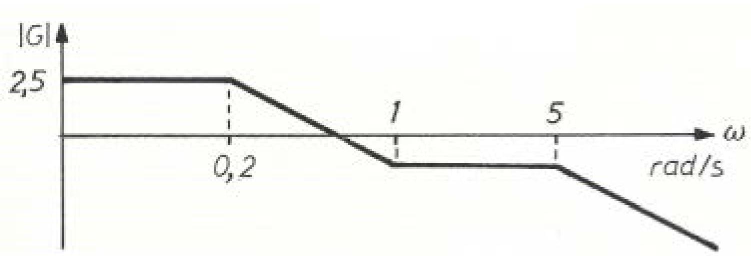
Svar:

a) $G_1 = \frac{1}{10s+1} \quad G_2 = 1 \qquad G_{closedloop}\left(\frac{Y}{R}\right) = \frac{G_1}{1+G_1 \cdot G_2} = \frac{\frac{1}{10s+1}}{1+\frac{1}{10s+1}\cdot 1} = \frac{1}{10s+2}$

b) $G\left(\frac{Y}{R}\right) = \frac{G_1G_2}{1+G_1G_2G_3+G_1G_2G_4}$

5. 2p

Bodediagram. Ange den överföringsfunktion som överensstämmer med följande Bode-diagram.
Där kurvan lutar är lutningen 1 dekad/dekad.



Svar:

$$G(s) = \frac{2{,}5\cdot(1+s)}{(5s+1)\cdot(0{,}2s+1)} = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 =$$

$$= \frac{2{,}5}{(5s+1)}\cdot\frac{1}{(0{,}2s+1)}\cdot(1+s) = \frac{2{,}5\cdot(1+s)}{s^2+5{,}2s+1}$$

6. 2p

a) Är detta en stabil överföringsfunktion? Motivera svaret!

$$\frac{s^2+3s+2}{s+4}$$

b) Rooth Hurwitz metod. Använd metoden för att avgöra om nämnarpolynomet är stabilt.

$$s^3+2s^2+s+1$$

Svar:

a) Nämnaren s + 4 har pol i s = -4 som ligger i vänstra halvplanet. Uppenbart stabil överföringsfunktion.

$$\frac{s^2+3s+2}{s+4} \qquad s=-4$$

b) s^3+2s^2+s+1

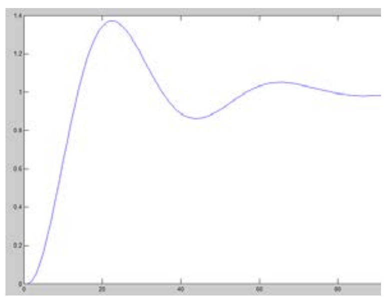
1	1	0
2	1	0
0,5	0	0
1	0	0

Ingen ändring av tecknet i första kolumnen.
Inga poler i höger halvplan – stabilt nämnarpolynom.

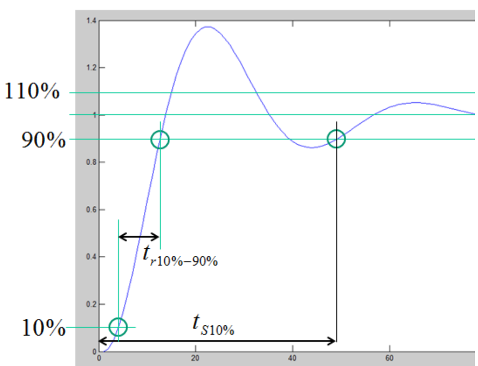
7. 2p

Risetime och settlingtime.

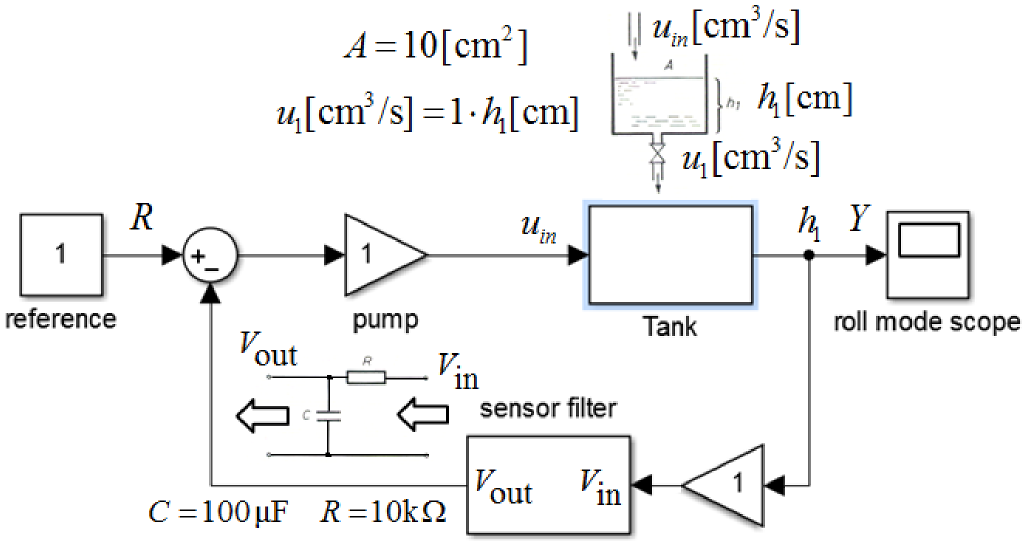
Markera i figuren (på svarsbladet, lämna in detta) hur man mäter risetime t_r och hur man mäter settlingtime t_s (±10%).



Svar:



8. 6p



En skola har en labutrustning med en tank som fylls med en pump. Se figuren. En trycksensor med ett lågpass RC-filter mäter vätskehöjden i tanken.

Tanken har tvärsnittsarean A = 10 cm^2. Mellan höjden i tanken och utflödet råder sambandet $u_1 = 1 \cdot h_1$. Sensor filtret består av R = 10 kΩ och C = 100 μF och har förstärkningen 1. Pumpen har förstärkningen 1.

Tag fram överföringsfunktionen $\frac{Y}{R}$ från referensstorhet till utstorhet.

Svar:

$$A\frac{dh_1}{dt} = u_{in} - u_1 = u_{in} - 1 \cdot h_1$$

$$\{L\} \quad H_1(As+1) = U_{in} \qquad \frac{H_1}{U_{in}} = \frac{1}{As+1} = \frac{1}{10s+1}$$

Sensor LP-filter med tidkonstant RC

$$V_{out} = V_{in}\frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{RCs+1} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^{3} \cdot s + 1} = \frac{1}{s+1}$$

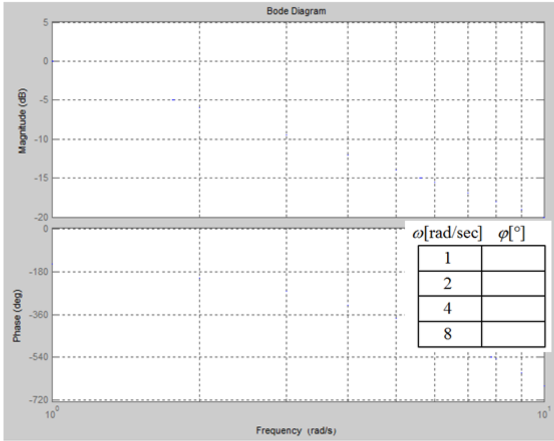
$$\frac{Y}{R} = \frac{\frac{1}{10s+1}}{1 + \frac{1}{10s+1} \cdot \frac{1}{s+1}} = \frac{s+1}{10s^2 + 11s + 2}$$

9. 8p

En process har överföringsfunktionen $G_P(s) = \dfrac{e^{-s}}{s}$.

Rita överföringsfunktionens Bodediagram (på svarsbladet, lämna in detta). Gradera ω-axeln. Rita beloppsfunktionen. Beräkna fasfunktionen φ för ω 1, 2, 4, 8. Skissa den i diagrammet. Beräkna

$\Phi_m = ?$ $A_m = ?$ $\omega_\pi = ?$ $\omega_C = ?$ $t_r \approx ?$ $e_0 = ?$



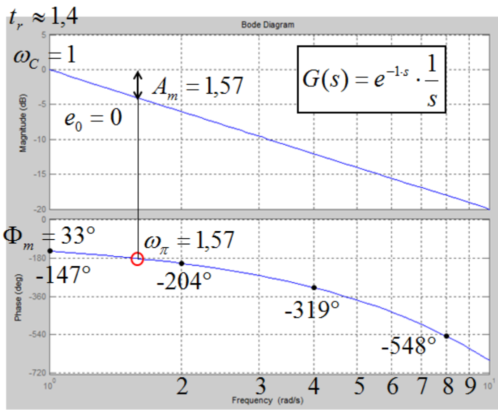
$\omega_C = ?$ $\omega_\pi = ?$ $A_m = ?$ $\Phi_m = ?$ $e_0 = ?$ $t_r \approx ?$

Svar:

$$G(s) = e^{-1\cdot s}\cdot\frac{1}{s} \quad G(j\omega) = e^{-j\omega}\cdot\frac{1}{j\omega}$$

$$|G(\omega)| = 1\cdot\frac{1}{\omega} \quad \varphi[°](\omega[\text{rad/sec}]) = -90 - 1\cdot\omega\frac{180}{\pi}$$

Beloppsfunktionen är en rak linje med lutningen 20dB/dekad genom punkten 0[dB],10^0[rad/sec].



$$\omega_\pi: \quad -180 = -90 - \omega_\pi\frac{180}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \omega_\pi = \frac{90\pi}{180} = 1{,}57\ [\text{rad/sec}]$$

$$|G(\omega_\pi)| = 1\cdot\frac{1}{\omega_\pi} \quad A_m = \frac{1}{|G(\omega_\pi)|} = \omega_\pi = 1{,}57$$

$$\varphi[°](\omega[\text{rad/sec}]) = -90 - 1\cdot\omega\frac{180}{\pi}$$

$$\omega = \{1,2,4,8\} \quad \varphi = \{-147°,-204°,-319°,-548°\}$$

$$|G(\omega)| = 1\cdot\frac{1}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega_C = 1$$

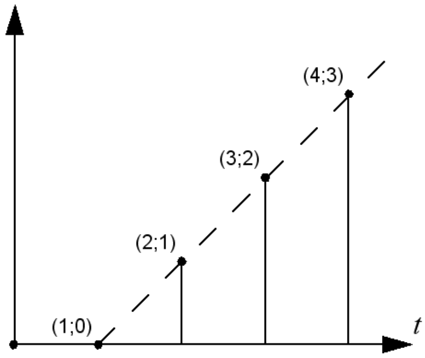
$$\Phi_m = 180° + \varphi(\omega_C) = 180° - 147° = 33°$$

$$t_r \approx \frac{1{,}4}{\omega_C} \quad \omega_C = 1 \quad \Rightarrow \quad t_r \approx 1{,}4$$

$e_0 = 0$ integrerande process.

10. 2p

a) Bestäm z-transformen för denna tidsdiskreta signal.
Ange den på både negativ och positiv form.



b) Bestäm tidsdiskreta motsvarigheten till

$$G(s) = 1 \quad G(s) = \frac{5}{s}$$

Svar:

a) Enhetsramp fördröjd ett steg

$$\frac{z}{(z-1)^2} \cdot z^{-1} = \frac{1}{(z-1)^2} \qquad \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \cdot z^{-1} = \frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}$$

b) Diskretisering med tabell.

$$G(s) = 1 \Rightarrow H(z) = 1 \quad G(s) = \frac{5}{s} \Rightarrow H(z) = \frac{5 \cdot h}{z-1}$$

11. 2p

Avgör om nedanstående system är stabilt.

$$H(z) = \frac{555z^2}{z^3 - 5z^2 + 25z + 125}$$

Svar: Schur-Coon metoden

$$z^3 - 5z^2 + 25z + 125$$

$$a_0 = 1 \quad a_1 = -5 \quad a_2 = 25 \quad a_3 = 125$$

$$b_0 = a_0 a_0 - a_3 a_3 = 1 \cdot 1 - 125 \cdot 125 = -15626$$

$$b_1 = a_0 a_1 - a_3 a_2 = 1 \cdot (-5) - 125 \cdot 25 = -3130$$

$$b_2 = a_0 a_2 - a_3 a_1 = 1 \cdot 25 - 125 \cdot (-5) = 650$$

…

Redan vid beräkningen av b_0 så får den negativt tecken medan a_0 har positivt tecken, så systemet kommer aldrig att kunna vara stabilt, fortsatta beräkningar är onödiga.

12. 8p

En process ska regleras med icke-integrerande polplaceringsregulator. Processen beskrivs med följande differensekvation

$$y[k] = 0{,}5y[k-1] + 5u[k-1] + 5u[k-2]$$

a) Bestäm överföringsfunktionen (1p)

b) Dimensionera regulatorn och anta att alla poler ska ligga i z = 0,5. (3p)

c) Rita blockschema för hela systemet. (1p)

d) Vilka ändringar behövs för att transformera ovanstående polplacerings regulator till dead-beat regulator? Skriv ner överföringsfunktionen för denna dead-beat regulator. (2p)

e) Jämför kvalitativt dead-beat regulatorn med ursprungliga regulatorn. (1p)

Svar:

a) $y[k] = 0{,}5y[k-1] + 5u[k-1] + 5u[k-2]$

$\{Z\}\quad Y = 0{,}5Yz^{-1} + 5Uz^{-1} + 5Uz^{-2}$

$$\frac{Y}{U} = \frac{5z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - 0{,}5z^{-1}}$$

$B(z) = 5z^{-1} + 5z^{-2} \quad A(z) = 1 - 0{,}5z^{-1}$

b) $n_p = n_a + n_b - 1 = 1 + 2 - 1 = 2$

$n_c = n_b - 1 = 2 - 1 = 1 \quad n_d = n_a - 1 = 1 - 1 = 0$

$P(z) = (1 - 0{,}5z^{-1})^2 = 0{,}25z^{-2} - z^{-1} + 1$

$C(z) = 1 + c_1 z^{-1} \quad D(z) = d_0$

$P(z) = A(z)C(z) + B(z)D(z)$

$0{,}25z^{-2} - z^{-1} + 1 = (1 - 0{,}5z^{-1})(1 + c_1 z^{-1}) + (5z^{-1} + 5z^{-2})(d_0)$

$0{,}25z^{-2} - z^{-1} + 1 = (5d_0 - c_1)z^{-2} + (c_1 + 5d_0 - 0{,}5)z^{-1} + 1$

$$\begin{matrix} -1 = c_1 + 5d_0 - 0{,}5 \\ 0{,}25 = 5d_0 - 0{,}5c_1 \end{matrix} \quad \begin{cases} c_1 = -0{,}5 \\ d_0 = 0 \end{cases}$$

$C(z) = 1 - 0{,}5z^{-1} \quad D(z) = 0$

$$\frac{P(z)}{B(z)} = \frac{1 - z^{-1} + 0{,}25z^{-2}}{5z^{-1} + 5z^{-2}} \quad K_r = \frac{P(z=1)}{B(z=1)} = \frac{1 - 1 + 0{,}25}{5 + 5} = 0{,}025$$

d) dead beat regulatorn har polerna i origo.

$P(z) = (1 - 0z^{-1})^2 = 1$

$1 + 0z^{-1} + 0z^{-2} = 1 + (c_1 + 5d_0 - 0{,}5)z^{-1} + (5d_0 - c_1)z^{-2}$

$0 = c_1 + 5d_0 - 0{,}5$

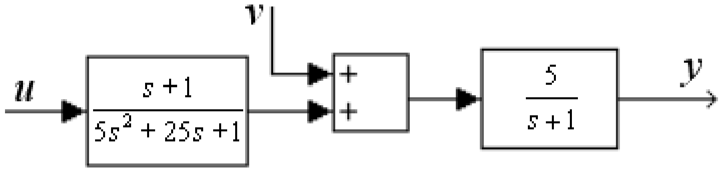
$0 = 5d_0 - 0{,}5c_1 \qquad c_1 = \frac{1}{3} \quad d_0 = \frac{1}{30}$

$$\frac{P(z)}{B(z)} = \frac{1}{5z^{-1} + 5z^{-2}} \quad K_r = \frac{P(z=1)}{B(z=1)} = \frac{1}{5 + 5} = 0{,}1$$

e) Dead-beatregulatorn beskrivs i bokens avsnitt 18.3.

13. 6p

En process beskrivs med nedanstående blockschema. Processen kan beskrivas på tillståndsform med två tillstånd `x1` och `x2`. Signalen *u* är styrsignal, *v* är reglerad storhet och *y* är mätsignal.



a) ställ upp systemet på tillståndsform. Välj styrbar kanonisk form. (3p)

b) beräkna stationärvärde av tillståndssystemet från a). Använd enhetssteg för *u* och *v*. (2p)

Svar:

a) $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -0,2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$

$$\dot{x}_3 = 5\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - x_3 + 5u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - x_3 + 5u$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0,2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0,2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Vi antar att insignalen och reglerad storhet är enhetssteg. *u*=1 och *v*=1.

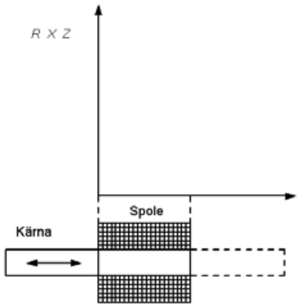
$$\begin{cases} 0 = -5x_1 - 0,2x_3 + u \\ 0 = x_2 \\ 0 = x_1 + x_2 - x_3 + 5u \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = -5x_1 - 0,2x_3 + 1 \\ 0 = x_1 - x_3 + 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 0 = -5(x_3 - 5) - 0,2x_3 + 1 \\ x_1 = x_3 - 5 \end{matrix}$$

$$0 = -5x_3 + 25 - 0,2x_3 + 1 \quad \Rightarrow \quad 5,2x_3 = 26 \quad \Rightarrow \quad x_3 \approx 5$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 5 - 5 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 5$$ Stationärvärdet är 5.

14. 2p



En spole används för att beröringsfritt mäta positionen hos en järnkärna. Kärnan förs först in i spolen från ena hållet och fortsätter sedan ut genom andra änden.
Skissa hur spolens resistans *R*, reaktans *X* och impedans *Z* varierar med järnkärnans position.
Rita de tre kurvorna (på svarsbladet, lämna in detta).

Svar: