Kapitel 1 Logik

Mängdlära och logik är en grundplåt för all matematik och därmed mycket teknologi, varför vi behandlar dessa ämnen i två inledande kapitel.

1.1 Utsagan

I matematik befattar man sig ofta med studiet av vad som är sant och vad som inte är sant. Det centrala i detta studium är vad man brukar kalla *utsagan*. En utsaga är en mening eller ordföljd som har ett sanningsvärde, det vill säga antingen sant eller falskt. Vi tar ett par exempel på meningar där några är utsagor och några inte är utsagor.

Meningar och ordföljder som är utsagor:
Jag är en fisk (Falsk)
Månen är en ost (Falsk)
2 + 2 = 4 (Sann)
Getter kan flyga (Falsk)
Getter har fyra ben (Sann)

Meningar och ordföljder som *inte* är utsagor:
Rock 'n' roll
Sikta på tavlan!
Två liter mjölk, en ost och bröd.

Skillnaden mellan ordföljder och meningar som är utsagor och de som inte är det är att i utsagan *händer* någonting. Vi har ett *subjekt* och ett *predikat*.

Vi kommer i detta inledande kapitel att använda bokstäver för att beteckna utsagor och utveckla en kalkyl med dessa. Vi kommer således att beteckna till exempel utsagan ”Jag är en fisk” med p eller någon annan bokstav.

Vi gör en definition av utsaga:

Definition 1.1: En <u>utsaga</u> är en mening, följd av ord eller symboler som vi kan tilldela ett sanningsvärde. Om p är en utsaga säger vi att p är <u>falsk</u> om p har sanningsvärdet falsk och vi säger att p är <u>sann</u> om p har sanningsvärdet sann.

1.2 Konjunktion

Vi kommer nu gradvis att utveckla en kalkyl med utsagor. Denna kalkyl kallas *satslogik* och kommer att bestå av ett par operationer som vi kan utföra på utsagor. Precis som att det finns räkneoperationer på tal, vektorer och matriser kommer vi att införa räkneoperationer på utsagor. Den första operationen kallas *konjunktion* som innebär att vi av två utsagor p och q bildar den utsaga som är sann då precis både p och q är sanna. Vi tar en definition:

Definition 1.2: Låt p och q vara två givna utsagor. Med <u>konjunktionen</u> av p och q menas då den utsaga som är sann precis då både p och q är sanna. Vi skriver konjunktionen av p och q med $p \wedge q$. Detta utläses ”p och q” eller ”konjunktionen av p och q”.

Exempel:

Beteckna utsagorna ovan med p, q, r, s och t, det vill säga låt:

p = ”Jag är en fisk”
q = ”Månen är en ost”
r = ”2 + 2 = 4”
s = ”Getter kan flyga”
t = ”Getter har fyra ben”

1. Konjunktionen mellan den falska utsagan p = ” Jag är en fisk” och den falska utsagan q = ”Månen är en ost” blir $p \wedge q$ = ”Månen är en ost och jag är en fisk.” Detta är en utsaga som vi uppfattar som falsk. Konjunktionen mellan två falska utsagor ger *alltid* en falsk utsaga som resultat.

2. Konjunktionen mellan den falska utsagan p = ” Jag är en fisk” och den sanna utsagan r = ”2 + 2 = 4” är $p \wedge r$ = ”Jag är en fisk och 2 + 2 = 4”. Detta är en utsaga som vi också uppfattar som falsk. Visserligen är 2 + 2 = 4 men att hävda att både ”2 + 2 = 4” OCH ”Jag är en fisk” resulterar i en falsk utsaga. En konjunktion mellan en falsk och en sann utsaga ger alltid en falsk utsaga som resultat.

3. Konjunktionen mellan de två sanna utsagorna r = ”2 + 2 = 4” och t = ”Getter har fyra ben” är $r \wedge t$ = ”2 + 2 = 4 och getter har fyra ben”. Detta är en utsaga som vi uppfattar som sann. Konjunktionen av två sanna utsagor ger alltid en sann utsaga.

Vi kan sammanfatta ovanstående exempel i en så kallad *sanningstabell* (tabell 1.1) som gäller för alla utsagor p och q. Sanningstabellen beskriver hur konjunktionen fungerar allmänt.

p	q	$p \wedge q$
Sann	Sann	Sann
Sann	Falsk	Falsk
Falsk	Sann	Falsk
Falsk	Falsk	Falsk

Tabell 1.1 Sanningstabell över konjunktionen

Samtliga olika möjliga kombinationer av tilldelningar av sanningsvärden hos p och q undersöks i en så kallad sanningstabell. Då vi har två utsagor finns det 4 möjligheter och således finns det 4 rader i denna sanningstabell.

1.3 Disjunktion

Disjunktionen är den utsaga som är sann då någon eller bådadera av de båda ingående utsagorna är sanna. Vi tar en definition:

Definition 1.3: Låt p och q vara två givna utsagor. Med <u>disjunktionen</u> av p och q menas då den utsaga som är sann precis då någon eller bådadera av p och q är sanna. Vi skriver disjunktionen av p och q med $p \vee q$. Detta utläses ”p eller q” eller ”disjunktionen av p och q”.

Vi kan återbesöka exemplet ovan, men nu studerar vi hur sanningsvärdet påverkas i en disjunktion:

1. Disjunktionen mellan den falska utsagan p = ” Jag är en fisk” och den falska utsagan q = ”Månen är en ost” blir $p \vee q$ = ”Månen är en ost eller jag är en fisk.” Detta är en utsaga som vi uppfattar som falsk. Disjunktionen mellan två falska utsagor ger *alltid* en falsk utsaga som resultat.

2. Disjunktionen mellan den falska utsagan p = ” Jag är en fisk” och den sanna utsagan r = ”2 + 2 = 4” är $p \vee q$ = ”Jag är en fisk eller 2 + 2 = 4”. Detta är en utsaga som vi uppfattar som sann. Visserligen är jag inte en fisk, men att ”2 + 2 = 4” är sant, det vet vi. Vad vi hävdar i $p \vee q$ är att *åtminstone* en av p och q är sann och det är alltså fallet här. En disjunktion mellan en falsk och en sann utsaga ger alltid en sann utsaga som resultat.

3. Disjunktionen mellan de två sanna utsagorna r = ”2 + 2 = 4” och t = ”Getter har fyra ben” är $p \vee q$ = ”2 + 2 = 4 och getter har fyra ben” är en utsaga som vi uppfattar som sann. Disjunktionen av två sanna utsagor ger alltid en sann utsaga.

Och motsvarande sanningstabell som beskriver hur disjunktionen ges i tabell 1.2.

p	q	$p \vee q$
Sann	Sann	Sann
Sann	Falsk	Sann
Falsk	Sann	Sann
Falsk	Falsk	Falsk

Tabell 1.2 Sanningstabell över disjunktionen

1.4 Negation

Disjunktioner och konjunktioner involverar två utsagor. Det finns emellertid en annan operation som bara involverar en utsaga. Vi kan ta en utsaga och vända på dess sanningsvärde. Att göra detta brukar i matematiska sammanhang kallas för att ”negera”, precis som när vi multiplicerar ett tal med –1 eller inverterar en matris. Vi tar en definition:

Definition 1.4: Låt p vara en given utsaga. Med <u>negationen</u> av p menas då den utsaga som har motsatt sanningsvärde mot p. Vi skriver negationen med $\sim p$ och detta uttalas ”icke p”.

Vi studerar negationen av p i en sanningstabell som ges i tabell 1.3.

p	$\sim p$
Sann	Falsk
Falsk	Sann

Tabell 1.3 Sanningstabell över negationen

Vi kan studera negationerna av några av utsagorna ovan. Lägg märke till hur sanningsvärdet skiftas från sann till falsk och tvärtom.

p = ”Jag är en fisk” (Falsk) ger oss $\sim p$ = ”Jag är inte en fisk” (Sann)

q = ”Månen är en ost” (Falsk) ger oss $\sim q$ = ”Månen är inte en ost” (Sann)

r = ”2 + 2 = 4” (Sann) ger oss $\sim r$ = ”2 + 2 $\neq$ 4” (Falsk)

1.5 Implikation

Disjunktion, konjunktion och negation kan tolkas som *operationer* på utsagor. Vi har p och q som är två utsagor och kan bilda de *nya* utsagorna $p \wedge q$, $p \vee q$ och $\sim q$ samt $\sim p$. Som vi sett i sanningstabeller är dessa utsagor *andra* utsagor än p och q eftersom deras sanningsvärden inte överensstämmer. Sanningsvärdet hos p är alltså inte samma som sanningsvärdet hos $p \wedge q$, då skulle de ha samma utseende på sina kolumner sin sanningstabell, men vi ser till exempel att rad 2 ovan i tabell 1.1 har olika sanningsvärden för p och $p \wedge q$ (p är Sann och $p \wedge q$ är Falsk). Vi ska nu införa en tredje form av kompositionsregel mellan två utsagor: *implikationen*.

Definition 1.5: Låt p och q vara två givna utsagor. Med implikationen, $p \rightarrow q$, menas då den utsaga som är sann precis då q följer av p. Implikationen, $p \rightarrow q$, utläses ”p medför q” eller ” q följer av p” eller ”Implikationen p medför q”. Utsagan p kallas implikationens förled och q kallas implikationens efterled.

Hur ska denna definition tolkas? Vad menas med att ”q följer av p”? Med implikation vill vi uttrycka ett *orsakssammanhang*. Implikationen $p \rightarrow q$ är sann om följande gäller: q är sann närhelst p är sann.

p	q	$p \rightarrow q$
Sann	Sann	Sann
Sann	Falsk	Falsk
Falsk	Sann	Sann
Falsk	Falsk	Sann

Tabell 1.4 Sanningstabell över implikationen

Tabell 1.4 är en sanningstabell för implikationen. Vi ska analysera varje rad i denna tabell.

Första raden
Här är p sann, q är sann och också $p \rightarrow q$ är sann. Det är naturligt att låta $p \rightarrow q$ bli sann eftersom både p och q är sanna. Då är det ju uppfyllt att ”q är sann närhelst p är sann”.

Andra raden
Här är p sann, q är falsk och $p \rightarrow q$ är falsk. Här ges implikationen $p \rightarrow q$ värdet falsk eftersom p är sann, men trots det är inte q sann. Då är det inte uppfyllt att ”q är sann närhelst p är sann” och därför ges alltså implikationen $p \rightarrow q$ värdet falsk.

Exempel:

> En affär hävdar följande: ”Om du handlar för mer än 1000 kronor får du 5% rabatt”. Här kan man säga att affären hävdar att en implikation är sann. Förledet i implikationen blir p = ”Du handlar för mer än 1000 kronor”. Efterledet blir q = ”Du får 5% rabatt.”. Det affären hävdar är att $p \rightarrow q$ är Sann. Antag att du då är kund i affären och verkligen handlar för mer än 1000 kronor. Om du då av någon anledning inte får de utlovade 5% i rabatt så skulle man kunna hävda att affären ljuger. Implikationen är således falsk eftersom det faktum att förledet var sann inte gav att efterledet också blev sann.

Tredje och fjärde raden
På tredje och fjärde raden i sanningstabellen *väljer* vi att tilldela implikationen $p \rightarrow q$ värdet sann. Detta är för att p på dessa två rader har värdet falsk. Oavsett vilket värde q då antar, sann

eller falsk, så väljer vi att tilldela implikationen $p \to q$ värdet sann. För att lättare förstå varför vi gör på detta sätt kan vi komma ihåg att implikationen $p \to q$ *inte* befattar sig med vare sig ps eller qs sanningsvärden. Utsagan $p \to q$ yttrar sig *bara* om ett orsakssammanhang. Det implikationen säger primärt är att om p är sann så ska q vara sann. Vi säger ingenting direkt om hur det ska vara då p är falsk. Eftersom en utsaga måste vara sann eller falsk får vi då bestämma oss för ett sanningsvärde hos $p \to q$ också då p är falsk. Det visar sig att det passar logiskt bäst om vi tilldelar $p \to q$ värdet sann närhelst förledet p är falskt.

1.6 Ekvivalens

Ekvivalens är ett ord bildat av två ord ”ekvi” som betyder ”lika” och ”valens” som betyder ”värde”. Ekvivalens betyder alltså likvärdig och två utsagor är ekvivalenta om de har samma sanningsvärden. Vi ger en definition.

Definition 1.6: Låt p och q vara två givna utsagor. Med <u>ekvivalensen,</u> $p \leftrightarrow q$, menas då den utsaga som är sann precis då p och q har exakt samma sanningsvärden. Ekvivalensen, $p \leftrightarrow q$, utläses ”p är ekvivalent med q” eller ”Ekvivalensen p och q” eller ”p ekvivalent med q”.

p	q	$p \leftrightarrow q$
Sann	Sann	Sann
Sann	Falsk	Falsk
Falsk	Sann	Falsk
Falsk	Falsk	Sann

Tabell 1.5 Sanningstabell över ekvivalensen

Av tabell 1.5 framgår att $p \leftrightarrow q$ är sann precis då p och q har *exakt samma sanningsvärde*. Så fort sanningsvärdet av p och q skiljer sig åt (som är fallet på rad 2 och 3) får $p \leftrightarrow q$ värdet falsk. På de rader där sanningsvärdena av p och q överensstämmer (som är fallet på rad 1 och rad 4) så tilldelas $p \leftrightarrow q$ värdet sann.

1.7 Egenskaper hos konnektiven

Alla operationer som vi studerat hittills, disjunktion, konjunktion, implikation och ekvivalens kallas med ett annat ord för *logiska konnektiv*. Vi kan bilda nya utsagor genom att använda dessa logiska konnektiv. I detta avsnitt ska vi se hur vi kan bygga sanningstabeller för utsagor som bildas som större logiska uttryck med upprepade användningar av den logiska konnektiven.

Att två utsagor är ekvivalenta innebär att de är sanna precis samtidigt och vi kan anse att de är samma utsaga. Vi ska nu bygga sanningstabeller för de logiska uttrycken $\sim p \wedge \sim q$ samt $\sim (p \vee q)$ och se att dessa i själva verket är ekvivalenta.

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim (p \vee q)$
Sann	Sann	Sann	Falsk	Falsk	Falsk	Falsk
Sann	Falsk	Sann	Falsk	Sann	Falsk	Falsk
Falsk	Sann	Sann	Sann	Falsk	Falsk	Falsk
Falsk	Falsk	Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann

Tabell 1.6 Sanningstabell över $\sim p \wedge \sim q$ *och* $\sim (p \vee q)$

Tabell 1.6 illustrerar hur vi skapar en sanningstabell för större komplicerade uttryck formerade med logiska konnektiv. Tabellen skapas i steg. Först anges de två första kolumnerna, det vill säga alla möjliga kombinationer av tilldelningar av sanningsvärden till utsagorna p och q. Det finns 4 sådana möjligheter och det innebär att hela tabellen får 4 rader. Vi väljer sedan att skapa en kolumn där vi anger sanningsvärdena för disjunktionen $p \vee q$. Detta är inget annat än tabell 1.2 upprepad som en del av tabell 1.6. Vidare bildar vi också kolumner där vi studerar sanningsvärdena hos $\sim p$ samt $\sim q$. Dessas sanningsvärden är förstås framtagna helt i analogi med tabell 1.3. Nu har vi flera komponenter och vi kan fortsätta studera sanningsvärdet av de mer komplicerade uttrycken $\sim p \wedge \sim q$ och $\sim(p \vee q)$. Det första uttrycket, $\sim p \wedge \sim q$ är en konjunktion mellan $\sim p$ och $\sim q$. En konjunktion är sann precis då båda ingående utsagor är sanna. Detta inträffar endast på 4:e raden varför $\sim p \wedge \sim q$ tilldelas värdet sann på 4:e raden och värdet falsk på samtliga andra rader. Den sista kolumnen anger sanningsvärden för $\sim(p \vee q)$ som är negationen av uttrycket som studeras i tredje kolumnen. För att få sista kolumnen behöver vi bara således negera sanningsvärdena från tredje kolumnen och det ger oss värdet sann på sista raden och värdet falsk på de andra raderna.

Betrakta nu de två sista kolumnerna i tabell 1.6. De är identiska! Båda lyder ”Falsk, Falsk, Falsk, Sann”. Eftersom tabell 1.6 är en sanningstabell som undersöker sanningsvärdena för uttrycken $\sim p \wedge \sim q$ och $\sim(p \vee q)$ för alla möjliga tilldelningar av sanningsvärden till p och q och dessa uttryck har *identiska kolumner* så måste alltså dessa två utsagor alltid ha samma sanningsvärde, det vill säga de måste vara *ekvivalenta*. Av tabell 1.6 kan vi alltså dra slutsatsen $(\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow \sim(p \vee q)$.

Detta är ett exempel på ett matematiskt *bevis* eller logisk härledning med sanningstabell.

Vi studerar ett annat exempel. I tabell 1.7 presenteras en sanningstabell hörande till uttrycken $p \rightarrow q$ och $\sim p \vee q$. Vi ser att dessa uttryck också har identiska sanningsvärden varför de måste vara ekvivalenta. Tabell 1.7 ger oss alltså möjlighet att dra slutsatsen $p \rightarrow q \leftrightarrow (\sim p \vee q)$.

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
Sann	Sann	Falsk	Sann	Sann
Sann	Falsk	Falsk	Falsk	Falsk
Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann
Falsk	Falsk	Sann	Sann	Sann

Tabell 1.7 Sanningsvärdena hos $p \rightarrow q$ *och* $\sim p \vee q$.

1.8 Dubbelstreckade pilar

Ovan har vi med hjälp av sanningstabeller kommit fram till de båda slutsatserna $(\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow \sim(p \vee q)$ och $p \rightarrow q \leftrightarrow (\sim p \vee q)$. Parenteserna runt $\sim p \wedge \sim q$ och $\sim p \vee q$ är nödvändiga för vi har ingen turordning bestämd mellan de logiska konnektiven. När det gäller uttryck av tal formerade med till exempel multiplikation och addition vet vi att multiplikationen ska utföras först och därefter additionen. Således har uttrycket $5 \cdot 3 + 1$ värdet $15 + 1 = 20$ för vi vet att vi ska utföra multiplikationen innan vi utför additionen. Det som säger att vi ska utföra multiplikationen första är en konvention, alltså något som vi bara bestämt oss för. Det skulle lika gärna kunna vara tvärtom och uttrycket skulle då få värdet $5 \cdot 3 + 1 = 5 \cdot 4 = 20$, ett helt annat värde alltså. Nu uppfattar vi den senare beräkningen som fel, just för att vi har den fastställda konventionen att vi utför multiplikationen före additionen. Om vi av någon anledning önskar utföra additionen först måste vi använda parenteser. Vi tecknar således uttrycket $5 \cdot (3+1)$ och beräknar detta genom att först utföra additionen som ger resultatet 4, därefter multiplikationen med 5 som ger oss att uttryckets värde blir 20. När det gäller konnektiv finns inte motsvarande konvention. Det är till exempel inte givet att konjunktion ska utföras före disjunktion eller att ekvivalens ska beräknas före konjunktion. Det är anledningen till att använder parenteser då vi tecknar slutsatserna $(\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow \sim (p \vee q)$ och $p \to q \leftrightarrow (\sim p \vee q)$. Vi ska nu införa ett skrivsätt som gör att vi slipper använda parenteser.

Skrivsätt: Låt p och q vara två utsagor formulerade med logiska konnektiv. Då vi vill uttrycka $p \to q$ eller $p \leftrightarrow q$ och inte vill sammanblanda beräkningen av de konnektiv som bygger upp p och q med de konnektiv som förbinder p och q (det vill säga $\to$ respektive $\leftrightarrow$) kan vi skriva $p \Rightarrow q$ respektive $p \Leftrightarrow q$ istället. Detta skrivsätt har samma betydelse som $(p) \to (q)$ respektive $(p) \leftrightarrow (q)$. De dubbelstreckade pilarna kallas också <u>implikation</u> ($\Rightarrow$) respektive <u>ekvivalens</u> ($\Leftrightarrow$) och utläses på samma sätt som enkelstrecksvarianterna ($\to$) respektive ($\leftrightarrow$).

Exempel:

Med det nya skrivsättet kan vi skriva $(\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow \sim (p \vee q)$ respektive $p \to q \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ som $\sim p \wedge \sim q \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$ respektive $p \to q \Leftrightarrow \sim p \vee q$. Lägg märke till hur mycket mindre parenteser som behövdes.

1.9 Argumentation och logiska härledningsregler

Problemställningar inom logik formuleras ofta genom att man anger ett antal premisser och ställer sig frågan ”vilken slutsats kan jag dra av dessa premisser?” En *premiss* är ett annat ord för ”förutsättning.”

Exempel: (*Disjunktiv Syllogism*) Betrakta de två premisserna

1. $p \vee q$
2. $\sim q$.

Den första premissen säger att p eller q har värdet sann. Den andra premissen säger att q inte är sann. Vad kan vi dra för slutsats om p? Något som vi i dagligt tal brukar kalla ”uteslutningsprincipen” säger oss att p måste vara sann. Varför det? Jo, premiss 1 säger att någon av p och q måste vara sann. Premiss 2 säger att det *inte* är q. Då är det bara p kvar som således måste vara sann. Slutsatsen blir alltså: p. Vi skriver det så här:

1. $p \vee q$
2. $\sim q$.

$\therefore p$

Tecknet $\therefore$ betyder ”slutsats” och indikerar att den utsaga som följer tecknet (alltså här p) följer av de premisser som står ovanför.

Vi ska nu illustrera en metod för att systematiskt räkna fram en slutsats av typen ovan. Vi kommer att basera oss på sanningstabeller. Vi börjar med att ta fram en speciell sanningstabell för premisserna 1 och 2 ovan.

p	q	$\sim q$	$p \vee q$	Uppfyllda premisser
Sann	Sann	Falsk	Sann	1
<u>Sann</u>	Falsk	Sann	Sann	1, 2
Falsk	Sann	Falsk	Sann	1
Falsk	Falsk	Sann	Falsk	2

Tabell 1.8 Sanningstabell hörande till premisserna 1. $p \vee q$ *och 2.* $\sim q$ *.*

Så här använder vi tabellen. Vi har adderat en 5:e kolumn där vi indikerar var var och en av premisserna är uppfyllda. Till exempel ser vi att första premissen, 1. $p \vee q$, är uppfylld på första, andra och tredje raden. På de rader där *båda* premisserna är uppfyllda finner vi den information om vilka slutsatser som kan dras om *p*s och *q*s sanningsvärden. Det är bara en rad där båda premisserna är uppfyllda och här är det den andra raden. På denna rad avläser vi att *p* har värdet <u>sann</u> och det blir således vår slutsats. (Vi har strukit under värdet <u>sann</u> i *p*s kolumn längst till vänster där vi avläste p's sanningsvärde..)

Vi kan alltså för all framtid komma ihåg följande härledningregel:

1. $p \vee q$
2. $\sim q$.
$\therefore p$

Denna regel är så vanligt förekommande att den fått ett eget namn. Den kallas *Disjunktiv Syllogism*.

Vi ska studera fler härledningsregler. En av de allra enklaste härledningsreglerna kallas *Modus Ponens* och den lyder så här:

Exempel: (*Modus Ponens*)

1. $p \to q$
2. p
$\therefore q$

Om *q* följer av *p* och vi vet att *p* är sann, ja då kan vi dra slutsatsen att *q* är sann. Detta är något som vi uppfattar som självklart. Vi ska emellertid bevisa denna härledningsregel med hjälp av en sanningstabell.

p	q	$p \to q$	Uppfyllda premisser
Sann	<u>Sann</u>	Sann	1, 2
Sann	Falsk	Falsk	2
Falsk	Sann	Sann	1
Falsk	Falsk	Sann	1

Tabell 1.9 Sanningstabell hörande till premisserna 1. $p \to q$ och 2. *p*.

I tabell 1.9 studerar vi hur sanningsvärdena hörande till premisserna 1. $p \to q$ och 2. *p* samverkar till att ge oss den slutsats vi hävdar är sann. Vi noterar i kolumnen "Uppfyllda premisser" att implikationen, som är vår första premiss, är sann på första, tredje och fjärde raden. Vi noterar i samma kolumn de rader där den andra premissen är uppfylld vilken är p som har värdet sann på första och andra raden. De rader där båda premisserna har värdet sann är den första raden. Vi går in och ser att q på denna rad är sann vilket innebär att vi visat att premisserna ger att q blir sann. (Vi har i qs kolumn strukit under sann.)

Sammanfattning: (*Modus Ponens*)

1. $p \rightarrow q$
2. p

$\therefore q$

Exempel: (*Modus Tollens*)

En annan enkel härledningsregel kallas *Modus Tollens* och den lyder så här:

1. $p \rightarrow q$
2. $\sim q$

$\therefore \sim p$

Om q följer av p och vi vet att q är falsk, ja då kan inte p vara sann, för om p hade varit sann så kunde inte q vara falsk. Vi ska bevisa denna härledningsregel med hjälp av en sanningstabell.

p	q	$\sim q$	$p \rightarrow q$	Uppfyllda premisser
Sann	Sann	Falsk	Sann	1
Sann	Falsk	Sann	Falsk	2
Falsk	Sann	Falsk	Sann	1
Falsk	Falsk	Sann	Sann	1,2

Tabell 1.9 Sanningsvärden hörande till premisserna 1. $p \rightarrow q$ *och 2. p.*

I tabell 1.9 ser vi hur $\sim q$ är sann då båda premisserna är uppfyllda vilket endast sker på sista raden.

Sammanfattning: (*Modus Tollens*)

1. $p \rightarrow q$
2. $\sim q$

$\therefore \sim p$

En lite mer komplicerad härledningsregel kallas *Hypotetisk Syllogism* och den lyder så här:

Exempel: (*Hypotetisk Syllogism*)

1. $p \rightarrow q$
2. $q \rightarrow r$

$\therefore p \rightarrow r$

Vad regeln säger är att om q följer av p och r i sin tur följer av q så måste r följa av p. Premiss 1 säger att p ger q. Premiss 2 säger att q i sin tur ger r. Vår slutsats blir att p ger r via q. Vi kan så att säga ”koppla ihop” implikationerna. Vi ska bevisa denna härledningsregel med hjälp av en sanningstabell.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	Uppfyllda premisser
Sann	Sann	Sann	Sann	Sann	<u>Sann</u>	1, 2
Sann	Sann	Falsk	Sann	Falsk	Falsk	1
Sann	Falsk	Sann	Falsk	Sann	Sann	2
Sann	Falsk	Falsk	Falsk	Sann	Falsk	2
Falsk	Sann	Sann	Sann	Sann	<u>Sann</u>	1, 2
Falsk	Sann	Falsk	Sann	Falsk	Sann	1
Falsk	Falsk	Sann	Sann	Sann	<u>Sann</u>	1, 2
Falsk	Falsk	Falsk	Sann	Sann	<u>Sann</u>	1, 2

Tabell 1.10 Sanningstabell hörande till premisserna 1. $p \to q$ *och 2.* $q \to r$.

I tabell 1.10 ser vi en förteckning över samtliga sanningsvärden hörande till premisserna i hypotetisk syllogism. Den första premissen, $p \to q$, är sann på 6 rader, första, andra, femte, sjätte, sjunde och åttonde raden. Den andra premissen, $q \to r$, är sann på 6 rader, första, tredje, fjärde, femte, sjunde och åttonde. På fyra av alla åtta raderna är båda premisserna sanna. Det är här som vi hävdar att vår slutsats också är sann. Det gäller första, femte, sjunde och åttonde raden och vi ser att det som vi hävdar är vår slutsats, nämligen $p \to r$, också har värdet sann på dessa fyra rader. (Vi har strukit under de aktuella positionerna i kolumnen för $p \to r$.) Beviset är slutfört.

Sammanfattning: (*Hypotetisk Syllogism*)

1. $p \to q$
2. $q \to r$

$\therefore p \to r$

Med sanningstabeller kan vi alltså visa både härledningsregler (*Modus Ponens* etc) och allmänna lagar (DeMorgan etc.) Vi ger en sammanställning av flera lagar. En del har vi sett och bevisat, andra lämnas som övningar.

LAGAR

För alla utsagor *p* och *q* gäller följande:

1. Kommutativa lagarna: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ samt $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
2. Associativa lagarna: $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ samt
   $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
3. Distributiva lagarna: $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ samt
   $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. Lagen om dubbel negation: $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
5. Idempotens: $p \wedge p \Leftrightarrow p$ samt $p \vee p \Leftrightarrow p$
6. DeMorgans lagar: $\sim p \wedge \sim q \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$ samt $\sim p \vee \sim q \Leftrightarrow \sim (p \wedge q)$
7. Absorptionslagarna: $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ samt $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Vi ger också en lista av flera härledningsregler som man kan visa med hjälp av sanningstabeller (några har vi redan visat, de övriga lämnas som övningar):

HÄRLEDNINGSREGLER

Modus Ponens 1. $p \to q$ 2. p $\therefore q$	*Modus Tollens* 1. $p \to q$ 2. $\sim q$ $\therefore \sim p$
Disjunktiv Syllogism 1. $p \vee q$ 2. $\sim q$ $\therefore p$	*Hypotetisk Syllogism* 1. $p \to q$ 2. $q \to r$ $\therefore p \to r$
Dilemma: Bevis genom falluppdelning 1. $p \vee q$ 2. $p \to r$ 3. $q \to r$ $\therefore r$	

Alla dessa regler och lagar uttrycker allmänna egenskaper hos konnektiven och logiken som kan användas i strikta logiska resonemang. Styrkan ligger i allmängiltigheten. Det spelar ingen roll vad utsagorna *p* och *q* säger, lagarna är *alltid* gällande.

1.10 Bevisföring och indirekt härledning

Utrustade med sanningstabeller kan vi klarlägga hur man resonerar på ett logiskt hållbart sätt. Vi kan mekaniskt, räknemässigt fastställa om en slutsats verkligen följer av ett antal premisser eller inte. Det går bra då antalet utsagor som är inblandade är 4 eller 5. Men om antalet utsagor blir större, låt oss säga 6 eller 7 så blir det svårare. Betrakta härledningen i figur 1.1.

1. $p \to q$
2. $r \vee s$
3. $\sim s \to \sim t$
4. $\sim q \vee s$
5. $\sim s$
6. $(\sim p \wedge r) \to u$
7. $w \vee t$

$\therefore u \wedge w$

Figur 1.1 En logisk härledning med 7 utsagor

Den logiska härledningen i figur 1.1 involverar 7 utsagor och om vi skulle kontrollera huruvida den härledningen är korrekt eller inte skulle vi behöva använda en sanningstabell med $2^7 = 128$ rader. Det är alldeles för tungt. Vi ska i detta avsnitt studera en alternativ teknik som kallas bevisföring där vi utgår från de logiska lagarna och härledningsreglerna och kalkylerar som vanligt med utsagor, men tekniken involverar en hel del känsla snarare än mekanik. En sanningstabell är ju bara att räkna ut. Bevisföring kräver mer av utföraren. Vi studerar ett exempel.

Exempel:

Studera följande härledning:

1. $p \to q$
2. $\sim q \vee r$
3. $\sim r$

$\therefore \sim p$

Vi vill undersöka om slutsatsen $\sim p$ verkligen följer av de tre premisser och då kan vi resonera så här:

Vi ser att premiss 2 är en disjunktion mellan två utsagor ($\sim q \vee r$). Den ena av dessa utsagor (r) är inte sann enligt premiss 3 ($\sim r$). Då kan vi använda disjunktiv syllogism på premisserna 2 och 3 och dra slutsatsen att $\sim q$ måste vara sann. Vi inför det som en fjärde premiss och skriver det så här:

4. $\sim q$, följer av 2, 3 och *Disjunktiv Syllogism*.

Nu har vi mer information som vi kan arbeta vidare med. Vi ser att premiss 4 uttrycker att q är falsk. Samtidigt betraktar vi premiss 1 som uttrycker att q följer av p. Men om efterledet i en implikation (här q) inte är sant så kan ej heller förledet vara sant. Detta kallas Modus Tollens och vi kan alltså på grundval av premisserna 1 och 4 med härledningsregeln Modus Tollens dra slutsatsen $\sim p$. Vi skriver det så här:

5. $\sim p$, följer av 1, 4 och *Modus Tollens*.

Vi observerar också att det också var detta som hävdades var en korrekt slutsats i härledningen och vi kan således dra slutsatsen att härledningen var korrekt. Vi kan sammanfatta alla dessa utredningar i en kortare form:

1. $p \to q$
2. $\sim q \vee r$
3. $\sim r$

$\therefore \sim p$

4. $\sim q$, följer av 2, 3 och *Disjunktiv Syllogism*.
5. $\sim p$, följer av 1, 4 och *Modus Tollens*.

Slutsats: Eftersom $\sim p$ följer av de givna premisserna 1, 2 och 3 är slutledningen korrekt.

Vi studerar ett exempel till.

Exempel: Är följande härledning korrekt?

1. $p \to q$
2. $q \to r$
3. $p \vee q$
4. $\therefore \sim r$

Vi börjar härleda nya premisser:

5. $p \to r$, följer av 1, 2 och *Hypotetisk Syllogism*
6. r , följer av 3, 5, 2 och *Dilemma*.

Vi ser här att slutsatsen 6. r är motsatt mot den slutledning som hävdas i 4. $\sim r$. Vi drar av detta slutsatsen att slutledningen inte är korrekt.

Anmärkning: Om slutsatsen istället för ”4. $\therefore \sim r$” hade lytt ”4. $\therefore r$” så hade härledningen varit korrekt.

Hur ska man veta vilka nya premisser som är lämpliga att härleda? Det finns inget bra svar på den frågan. Det man kan göra är att betrakta en härledning och i huvudet genomföra några led för att ”känna efter” var ett visst spår leder. Detta är en förmåga som man kan utveckla genom att träna. Vi studerar det inledande exemplet och ser om vi kan lista ut om det utgör en korrekt härledning eller inte.

Exempel: Avgör om följande slutledning är korrekt eller inte:

1. $p \to q$
2. $r \vee s$
3. $\sim s \to \sim t$
4. $\sim q \vee s$
5. $\sim s$
6. $(\sim p \wedge r) \to u$
7. $w \vee t$

$\therefore u \wedge w$

Det kommer att visa sig att härledningen är korrekt. Vi ska studera den steg för steg.

8. $\sim t$, följer av 5, 3 och *Modus Ponens*.
9. w, följer av 7, 8 och *Disjunktiv Syllogism*.

Varför härleder vi *w*? Jo, om vi betraktar slutledningen, $\therefore u \wedge w$, som vi hävdar följer av premisserna 1-7, består den av *w* och *u*. Vi har i ett första steg lyckats visa att *w* är sann. Om vi i fortsättningen lyckas visa att även *u* är sann så kan vi dra slutsatsen att även konjunktionen $u \wedge w$ är sann vilket fullbordar beviset för att slutledningen är riktig. Vi går nu vidare och visar hur *u* blir sann.

10. r, följer av 2, 5 och *Disjunktiv Syllogism*.
11. $\sim q$, följer av 5, 4 och *Disjunktiv Syllogism*.
12. $\sim p$, följer av 11, 1 och *Modus Tollens*.
13. $\sim p \wedge r$, 10, 12.
14. u, följer av 13, 6 och *Modus Ponens*.

Vi har nu visat hur u blir sann. Vi slår nu samman 9 och 14 och får:

15. $u \wedge w$.

Slutledningen är korrekt.

Det gäller alltså att pussla och fundera när man arbetar med frågeställningar av den här typen. I början kan man känna sig lite vilsen, men det är bara att träna. Det finns också en del knep som vi ska studera här. Vi ska börja med att studera falluppdelning.

Exempel: Är nedanstående slutledning korrekt?

1. $\sim r \to s$
2. $s \to u$
3. $u \to t$
4. $r \to t$

$\therefore t$

Vi vet att för alla utsagor gäller att det antingen är sanna eller falska. Detta gäller också för utsagan s. Låt oss anta $\sim s$ och se vilka följder det får.

5. $\sim s$, *antagande för bevis genom falluppdelning (första fallet).*
6. r, följer av 5, 1 och *Modus Tollens*.
7. t, följer av 6, 4 och *Modus Ponens*.

Vi har alltså visat att om $\sim s$ är sann så följer t. Vi går nu vidare och undersöker vad som händer om vi antar s.

8. s, *antagande för bevis genom falluppdelning (andra fallet).*
9. u, följer av 8, 2 och *Modus Ponens*.
10. t, följer av 9, 3 och *Modus Ponens*.

Vi ser att t således följer av såväl $\sim s$ som s. Vår slutsats blir att t följer av de givna premisserna.

11. t.

Slutledningen är således korrekt.

Nästa knep som vi ska studera kallas indirekt härledning som vi studerar det i ett exempel.

Exempel: Är följande slutledning korrekt?

1. $p \to q$
2. $q \to \sim p$
3. $\therefore \sim p$

De båda premisserna $p \to q$ och $q \to \sim p$ ger oss just ingen startpunkt, de är bara implikationer som pekar åt olika håll. Var ska vi starta? Vi kan införa en egen startpunkt och göra ett antagande. Sedan kan vi behandla antagandet som en premiss och se vart det leder. Om en motsägelse dyker upp vet vi att antagandet inte kan vara sant.

Vi inför således

4. p, *antagande för indirekt härledning.*

och fortsätter och observerar att 1 och 4 tillsammans med *Modus Ponens* ger oss

5. q

vidare får vi från 2 och 5 och *Modus Ponens*

6. $\sim p$.

Men detta är en motsägelse, vi har ju antagit 4. p. Vi kan inte ha både p och $\sim p$ varför vi drar slutsatsen att vårt antagande p, måste vara falskt. Vi har alltså visat

7. $\sim p$, följer av 4, 6 och *indirekt härledning.*

Av detta drar vi slutsatsen att härledningen måste vara korrekt.

Vi studerar ett exempel till på indirekt härledning. Exemplet är hämtat fårn en tentamensskrivning i Diskret matematik hösten 2003.

Exempel: Är följande härledning korrekt?

1. $r \to s$
2. $s \to \sim r$
3. $t \to u$
4. $u \to (\sim t \vee r)$

$\therefore \sim t$

Vi antar r och ser vart det leder.

5. r, *antagande för indirekt härledning.*
6. s, följer av 5, 1 och *Modus Ponens*.
7. ~ r, följer av 6, 2 och *Modus Ponens*.

Premiss 7 motsäger premiss 5, eftersom premiss 5 var ett antagande kan inte antagandet i premiss 5 vara sant. Således måste motsatsen till det som antogs i premiss 5 vara sant.

8. $\sim r$, följer av 5, 7 och *indirekt härledning*.

Vi verkar inte komma längre. Vi har etablerat att $\sim r$ är sant, men hur gör vi nu? Vi kan upprepa proceduren fast med en annan utsaga.

9. t, *antagande för indirekt härledning.*
10. u, följer av 9, 3 och *Modus Ponens*.
11. $\sim t \vee r$, följer av 10, 4 och *Modus Ponens*.
12. $\sim t$, 11, 8 och *Disjunktiv Syllogism*.

Men premiss 12 motsäger premiss 9. Eftersom premiss 9 var ett antagande kan således antagandet i premiss 9 inte vara sant. Det betyder att motsatsen till premiss 9 måste vara sann och vi har således visat:

13. ~ *t*, följer av 12, 9 och *indirekt härledning*.

Premiss 13 är ~ t vilket alltså följer av premisserna och slutledningen är således korrekt.