Kapitel 2 Mängdlära

2.1 Mängden

Det centrala i mängdläran är förstås *mängden*. En mängd är en samling objekt. Objekten kan vara tal, matriser, vektorer, eller världsliga ting som bilar eller personer. Ofta brukar man kalla objekten för *element* och man säger att ett element ingår i en mängd om elementet finns i den samling objekt som utgör mängden. Vi gör en definition och inför lite skrivsätt.

Definition 2.1: En mängd är en *samling objekt*. Objekten kallas element och mängden sägs bestå av sina element. En mängd är helt bestämd av de element som ingår. Om en mängd betecknas med M skriver vi $x \in M$ för att beteckna att elementet x tillhör M. Vi skriver vidare $x \notin M$ för att beteckna att x inte tillhör M. Vi kan ange en mängd genom att räkna upp dess element. Då används skrivsättet $M = \{a, b, c, ...\}$ där a, b och c betecknar ingående element i M.

Exempel:

> Låt M vara mängden av alla positiva udda heltal. Då är $M = \{1,3,5,...\}$. Vidare vet vi då att $5 \in M$, $7 \in M$, men till exempel gäller $2 \notin M$ och $-7 \notin M$.

I en mängd finns ingen inbördes ordning mellan elementen. Således är mängderna $\{1,2,3\}$ och $\{2,3,1\}$ precis samma mängd. Vidare kan varje element bara förekomma högst en gång i varje mängd. Således anser vi att mängden $\{1,2,1,3,4\}$ egentligen är mängden $\{1,2,3,4\}$ och man *kan* även anse att mängden $\{1,2,1,3,4\}$ är felaktigt angiven eftersom ett element (talet 1) förekommer två gånger.

Det finns en möjlighet att en mängd inte innehåller några element alls. En sådan mängd kallas tom och det finns bara en sådan mängd som då brukar kallas ”den tomma mängden”. Vi gör en definition och inför ett skrivsätt.

Definition 2.2: Den tomma mängden är den mängd som inte har några element alls. Vi betecknar den med symbolen $\varnothing$.

Eftersom $\varnothing$ inte innehåller några element kan det aldrig vara uppfyllt att $x \in \varnothing$ för något element x alls. Däremot gäller $x \notin \varnothing$ för alla element x.

Vi ska utvidga skrivsättet för mängder lite grann. En mängd kan skrivas på följande sätt:

$$\{ \text{ element } | \text{ beskrivning av hur elementet bildas} \}$$

Vi använder alltså klamrar och innanför vänstra klammern ({) anger vi de element som finns i mängden. Sedan fortsätter vi med ett lodrätt streck (|) och efter det anges en beskrivning på hur de element som ingår i mängden bildas. Denna beskrivning kan använda sig av satslogik och vi kan alltså bilda utsagor som beskriver krav på elementen. Vi avslutar sedan med en höger klammer. Vi ska ange ett par exempel på detta:

Exempel:

- Låt $\boldsymbol{Z}$ vara mängden av alla heltal. Vi bildar då mängden $M = \{x \mid x \in \boldsymbol{Z} \wedge x > 4\}$. Denna mängds element betecknar vi alltså med x och vi bildar x genom att följa de anvisningar som finns efter det lodräta strecket. Således ser vi att x ska väljas bland de hela talen (mängden $\boldsymbol{Z}$) och x ska väljas större än 4. Det innebär att mängden M blir denna mängd: { 5, 6, 7, 8, … } det vill säga alla heltal från och med 5.

- Låt återigen $\boldsymbol{Z}$ vara mängden av alla heltal. Vi bildar mängden $M =$ $\{2 \cdot x \mid x \in \boldsymbol{Z} \wedge x > 3\}$. Mängden M bildas nu genom att vi tar heltal x större än 3, det vill säga 4, 5, 6, … och så vidare. Vi multiplicerar sedan alla dessa tal med 2 och så bildar vi alltså M. Mängden M består således av elementen $\{2 \cdot 4,\ 2 \cdot 5,\ 2 \cdot 6, \ldots\}$ = { 8, 10, 12, … } det vill säga alla jämna tal från och med 8.

2.2 Union

Vi studium av mängder behöver man ibland slå samman två (eller flera) mängder till en. Detta kallas *union* och är den första *mängdoperationen* som vi ska införa. Då man slår samman två mängder A och B får man en tredje mängd C som består av alla de element som ingår i A eller B. Det betyder att om ett element x förekommer både i A och B kommer elementet x endast att förekomma en gång i den sammanslagna mängden, minns att en mängd bara kan innehålla varje element högst en gång. Vi tar detta i en definition.

Definition 2.3: Låt A och B vara mängder. Med *unionen* av A och B menas då mängden C som innehåller alla element som ingår i A eller B. Vi skriver detta med unionstecknet ”$\cup$” som $C = A \cup B$. Med klammernotation har vi $C = A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

Exempel:

- Låt $A = \{1,2,3,4\}$ och $B = \{3,4,5,6\}$. Då är $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} =$ { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }. (Här har vi valt att inte beteckna unionen av A och B med en tredje symbol som i definitionen, men vi skulle lika gärna ha kunna valt att sätta ett till namn, C, på $A \cup B$.)

- Låt A vara mängden av alla udda positiva heltal, det vill säga $A = \{1,3,5,7,\ldots\}$ och låt B vara mängden av alla negativa udda heltal, det vill säga $B = \{-1, -3, -5, -7, \ldots\}$. Unionen av A och B blir då $A \cup B = \{\ldots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$ det vill säga alla udda heltal.

- För alla mängder A gäller $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$. Att ta unionen mellan mängden A och den tomma mängden innebär att slå ihop A med den mängd som inte innehåller några element alls och då tillför vi inga nya element. Tomma mängden har ju inga element så då får vi tillbaka A. Detta är precis i analogi med att alla tal x uppfyller $0 + x = x + 0 = x$. Lägger vi på 0 på x får vi tillbaka x. Tomma mängden är alltså ett slags *nolla* bland mängder.

2.3 Snitt

Med union kan vi alltså slå samman mängder och bilda nya mängder. Unionen av två mängder A och B innehåller alla element som ingår i *någon* av mängderna A och B som vi sett ovan. Det finns dock ofta anledning av bilda en mängd som innehåller elementen som finns i *både* A och B. Då bildar vi det så kallade *snittet* mellan A och B och det är nästa operation som vi ska införa.

Definition 2.4: Låt A och B vara två givna mängder. Med snittet mellan A och B menas då mängden C som innehåller alla element som ingår i både A och B. Vi skriver detta med snittecknet ”$\cap$” som $C = A \cap B$. Med klammernotation har vi $C = A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

Exempel:

- Låt $A = \{1,2,3,4\}$ och $B = \{3,4,5,6\}$. Då är $A \cap B = \{3,4\}$ för 3 och 4 är de element som ingår i både A och B. (Här har vi valt att inte beteckna unionen av A och B med en tredje symbol som i definitionen, men vi skulle lika gärna ha kunna valt att sätta ett till namn, C, på $A \cap B$.)

- Låt A vara mängden av alla udda positiva heltal, det vill säga $A = \{1,3,5,7,\ldots\}$ och låt B vara mängden av alla negativa udda heltal, det vill säga $B = \{-1, -3, -5, -7, \ldots\}$. Snittet av A och B blir då $A \cap B = \{$inga element alls$\}$ = tomma mängden = $\varnothing$. Det finns ju inga tal som ligger i båda mängderna, således måste snittet vara tomt.

- För alla mängder A gäller $A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$. Att bilda snittet mellan en mängd A och tomma mängden $\varnothing$ innebär att bilda den mängd som innehåller elementen som ligger både i A och $\varnothing$. Men tomma mängden *har ju inga element* så då *får vi inga element* som ligger i *båda* mängderna. Mängden $A \cap \varnothing$ måste således vara tomma mängden, $\varnothing$. Detta är precis i analogi med att alla tal x uppfyller $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ och vi ser återigen hur tomma mängden är likt talet 0.

2.4 Delmängd

Ofta vill man uttrycka att de element som finns i en viss mängd A också finns i en annan mängd B. Detta betyder att hela mängden A är innesluten i B eller att mängden A är en del av mängden B. Till exempel är mängden av alla udda positiva heltal innesluten i mängden av alla positiva heltal. Vi gör även nu en formell definition:

Definition 2.5: Låt A och B vara två mängder. Om varje element i A även finns i B säger vi att A är innesluten i B eller att A är en delmängd av B. Vi skriver detta så här: $A \subset B$.

Exempel:

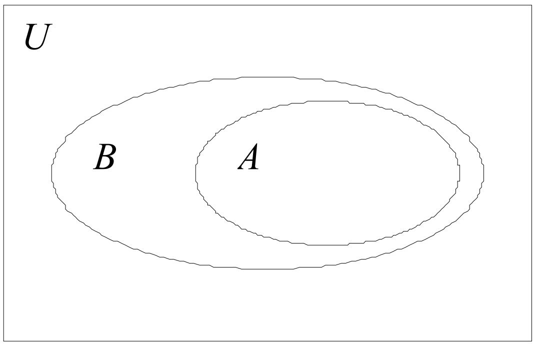
- Låt A vara mängden av alla udda positiva heltal, det vill säga låt $A = \{1,3,5,7,\ldots\}$. Om B då är mängden av alla heltal så är A innesluten i B, det vill säga A är en delmängd av B. Vi kan alltså skriva $A \subset B$.

- Tomma mängden $\varnothing$, anses vara delmängd av alla mängder, det vill säga, för alla mängder M gäller $\varnothing \subset M$.

Anmärkning: I andra framställningar av mängdläran används symbolen "$\subseteq$" för att beteckna delmängder. Symbolen "$\subseteq$" är en sammanslagning mellan likhetstecknet = och $\subset$ och är tänkt att indikera att likhet mellan mängderna också kan råda. Varje mängd är ju en delmängd av sig själv och beteckningen $A \subseteq B$ betyder således "*A* är en delmängd av *B* eller så är mängderna *A* och *B* lika". Vi gör inte den distinktionen i denna framställning utan använder genomgående symbolen "$\subset$" för att beteckna delmängder och vi inkluderar också möjligheten att mängderna *A* och *B* är lika då vi skriver $A \subset B$.

2.5 Venndiagram och universum

Matematikern John Venn (1834-1923) kom på ett sätt att åskådliggöra mängder och deras inbördes relationer. Han tänkte sig mängderna som om de var inneslutna i en stor allomfattande mängd som han kallade *universum* och betecknade med *U*. Diagrammet lät sig då åskådliggöras enligt figur 1.1.



Figur 1.1

I figur 1.1 åskådliggörs två mängder *A* och *B* inneslutna i ett universum *U*. Placeringen av representationen av mängden *A* inuti representationen av mängden *B* indikerar att *A* är en delmängd av *B*.

I många matematiska problemställningar finns en alltomfattande mängd som innehåller alla de element som är relevanta för studiet av den aktuella problemställningen. Det motiverar behovet av en allomfattande mängd som vi kallar *universum*. Vi tar ett par exempel.

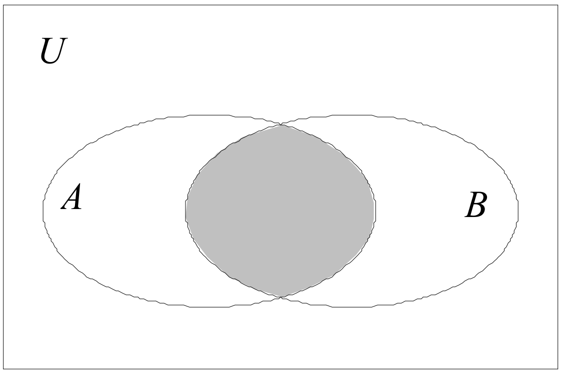
Exempel:

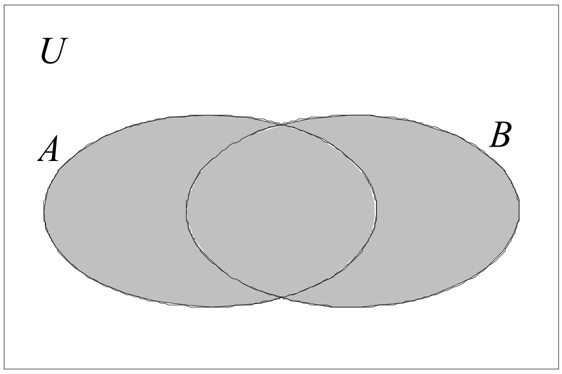
- I linjär algebra studerar vi linjer och plan som kan betraktas som mängder av punkter. Det kan då vara lämpligt att låta universum, *U*, vara mängden av *alla* punkter. I figur 1.1 ser vi en situation där vi studerar en mängd, *A*, som är innesluten i en annan, *B*, och att dessa två mängder i sin tur är inneslutna i ett universum *U*. En situation där detta uppkommer är om *A* är en linje som ligger i ett plan *B* och detta plan i sin tur är inneslutet i rummet av alla punkter som då blir universum *U*. Figur 1.1 beskriver givetvis inte geometriska förhållanden, men är väl ägnad att illustrera de mängdteoretiska förhållandena mellan linjen (mängden *A*), planet (mängden *B*) och hela rummet (mängden *U*.)

- Vi kan låta *U* beteckna alla studenter i hela världen, *B* beteckna studenterna i Sverige och *A* beteckna studenter vid KTH. Dessa tre mängder kan också beskrivas med Venndiagrammet i figur 1.1. $A \subset B$ och $B \subset U$. Detta skrivs ibland $A \subset B \subset U$.

Styrkan med mängdläran (och all matematik) är att samma principer kan användas för att modellera, illustrera och dra slutsatser kring vitt skilda problemställningar. Samma diagram i figur 1.1 kan alltså vara användbart vid studium av linjär algebra och vid studium av studenter.

Vi kan använda Venndiagram för att illustrera några vanliga mängder som vi redan studerat.





Figur 1.2 *Figur 1.3*

I figur 1.2 har vi två mängder A och B och vi har även skuggat den gemensamma delen mellan dessa två mängder. Det innebär att den figuren illustrerar de element som ligger i båda två av mängderna och figuren illustrerar således snittet mellan A och B, $A \cap B$. I figur 1.3 har vi återigen två mängder A och B. Området som är skuggat här är det område som ligger i antingen A eller B eller bådadera, det vill säga detta Venndiagram illustrerar unionen mellan A och B, $A \cup B$.

2.6 Komplement

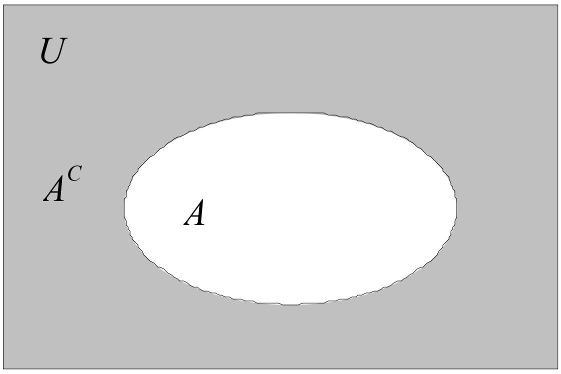
Då man väljer ett universum U och studerar delmängder av detta universum är det ibland av intresse att bilda det så kallade *komplementet* av en mängd A. Komplementet av en mängd A är den delmängd av U som innehåller alla element som inte är element i A. Vi tar en formell definition.

Definition 2.6: Låt U vara ett givet universum och låt A vara en delmängd av U. Med komplementet till A menas då den mängd som innehåller alla element i U som inte är innehållna i A. Komplementet till A skrivs A^c. Med klammernotation har vi $A^c = \{x \mid x \notin A\} = \{x \mid \sim (x \in A)\}$.

Anmärkning: Vi har nu infört union, snitt och komplement och gjort observationen att

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- $A^c = \{x \mid \sim (x \in A)\}$.

På detta sätt kopplas union ($\cup$) ihop med disjunktion $\vee$, snitt ($\cap$) kopplas ihop med konjunktion ($\wedge$) och tagandes av komplement (^{c}) med negation (~).
I ett Venndiagram kan komplementet till en given mängd A illustreras enligt figur 1.4.



Figur 1.4

I figur 1.4 har vi illustrerat komplementet till en given mängd A genom att skugga de delar i U som inte är innehållna i A. 3 – 4.

Exempel:

- Låt A vara mängden av alla udda heltal { …, –5, –3, –1, 1, 3, 5, 7, … } och låt universum U utgöras av alla heltal. Komplementet till A, det vill säga den mängd som vi betecknar med A^c blir då de tal som inte är udda. Dessa tal är de jämna talen {…, –4, –2, 0, 2, 4, 6, …}.

- Låt B vara mängden av alla barn och U vara mängden av alla människor. Komplementet till B blir då B^c = mängden av alla människor som inte är barn, det vill säga alla vuxna.

2.7 Mängddifferens

En speciell operation införs för att subtrahera en mängd från en annan.

Definition 2.7: Låt A och B vara två givna mängder. Med mängddifferensen $A – B$, menas då den mängd som innehåller de element som finns i A men som inte ingår i B. Med klammernotation får vi $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

Om vi tolkar vad som står i definitionen ser vi att $A – B$ är alla element som finns i A, men där vi har tagit bort de element som finns i B från mängden A. Vi ser på ett par exempel.

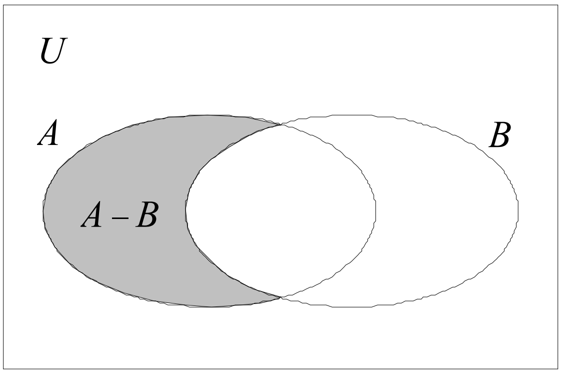
Exempel:

- Låt A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } och B = { 3, 4, 5, 6, 7, 8 }. Mängden $A – B$ blir då { 1, 2 } eftersom de andra elementen i A, talen 3, 4, 5, 6 finns i B och således tas bort då vi bildar $A – B$.

- Låt Z vara mängden av alla heltal och låt J vara mängden av alla jämna tal. Mängden $Z – J$ blir då alla heltal som inte är jämna, det vill säga $Z – J$ blir mängden av alla udda tal.

- Låt A vara vilken mängd som helst. Mängden $A – \varnothing$ blir då mängden A själv. Detta eftersom vi väljer att från A ta bort de element som ingår i $\varnothing$. Eftersom $\varnothing$ inte innehåller några element tar vi således inte bort någonting och mängden $A - \varnothing$ kan inte skilja sig alls från mängden A. Således blir $A - \varnothing = A$. Detta visar att $\varnothing$ är likt talet 0.

Vi illustrerar differensen mellan två mängder med ett Venndiagram i figur 2.5



Figur 2.5. Illustration av $A - B$

Om vi återigen studerar klammernotationen för $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ ser vi något intressant. Beskrivningen av hur elementen väljs till vänster om det lodräta strecket är en konjunktion vilket innebär att vi borde kunna skriva mängddifferensen som ett snitt. Det är alldeles riktigt. Vi kan skriva $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \mid x \in A\} \cap \{x \mid x \notin B\}$. Den första mängden i detta snitt är A själv och den andra mängden är komplementet till B. Vi har således att $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \mid x \in A\} \cap \{x \mid x \notin B\} = A \cap B^c$ och vi har således visat en mängdlag: $A - B = A \cap B^c$.

2.8 Disjunkta mängder

Definition 2.8: Låt A och B vara två givna mängder. Då sägs A och B vara <u>disjunkta</u> om och endast om de inte innehåller några gemensamma element.

Från definitionen följer att två mängder är A och B är disjunkta om och endast om snittet mellan dem är tomma mängden. Vi inser alltså att A och B är disjunkta $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$.

Exempel:

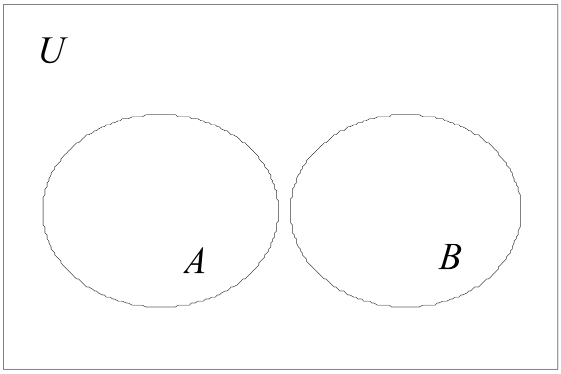
- Mängden av alla positiva heltal $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \}$ och mängden av alla negativa heltal $B = \{ -1, -2, -3, -4, \ldots\}$ är två mängder som inte har några gemensamma element. Alltså gäller att $A \cap B = \varnothing$.

- Mängden av alla jämna heltal $A = \{ 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \}$ och mängden av alla udda tal $B = \{ \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \}$ har inga gemensamma element. Alltså är dessa mängder disjunkta och vi kan även här konstatera att $A \cap B = \varnothing$ gäller.

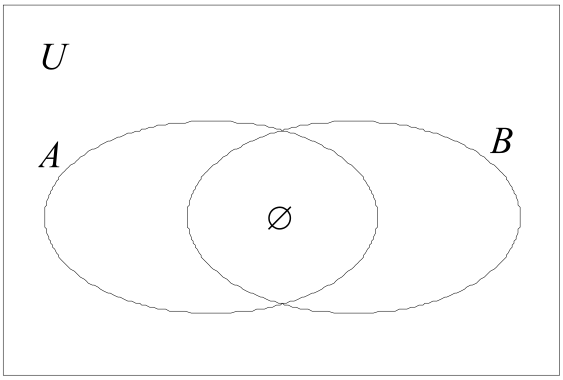
- Mängderna $A = \{ 1, 3, 5 \}$ och $B = \{ 2, 3, 4 \}$ har elementet 3 gemensamt. Således är de mängderna inte disjunkta och vi har $A \cap B = \{3\} \neq \varnothing$.

- Tomma mängden är disjunkt med varje annan mängd. Eftersom tomma mängden inte innehåller några element alls kan den heller inte ha några element gemensamt med någon annan mängd. Vi har således $A \cap \varnothing = \varnothing$ för varje mängd A.

Med Venndiagram kan vi illustrera att två mängder är disjunkta på två sätt. I figur 2.6 har vi illustrerat att mängderna A och B är disjunkta genom att lägga representationerna av mängderna helt enkelt ett stycke från varandra. I figur 2.7 har vi illustrerat samma sak genom att lägga in symbolen för tomma mängden i det fält som representerar de gemensamma elementen för A och B.



Figur 2.6 Två disjunkta mängder



Figur 2.7 Två disjunkta mängder

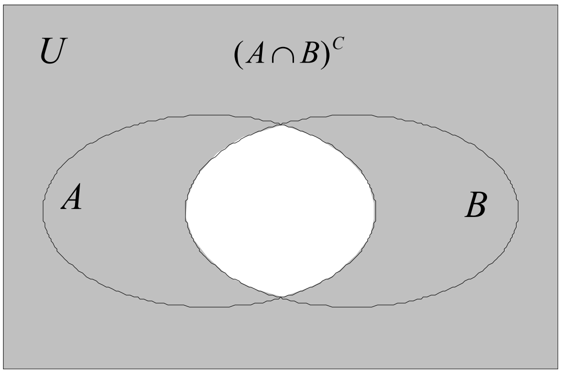
2.9 Mängdlagar

Precis som det finns lagar för utsagor finns det lagar för mängder. Det är faktiskt så att för varje lag för utsagor finns en motsvarande lag som gäller för mängder. Till exempel minns vi från kapitel 1 att DeMorgans lag gäller för utsagor: $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$. Om man studerar Venndiagram med två mängder A och B kan man faktiskt visa att precis samma sak gäller mängder. Skillnaden blir bara att negation av utsagor (~) byts mot mängdkomplement (^{c}) och disjunktion mellan utsagor ($\vee$) byts mot union av mängder ($\cup$) och konjunktion av utsagor ($\wedge$) byts mot snitt mellan mängder ($\cap$) och ekvivalens mellan utsagor ($\Leftrightarrow$) byts till identitet mellan mängder (=). Således har vi DeMorgans lagar även för mängder:

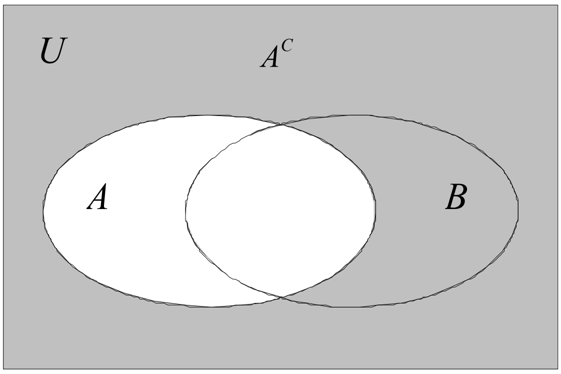
Sats 2.1: (DeMorgans lagar) För alla mängder A och B gäller: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ och $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

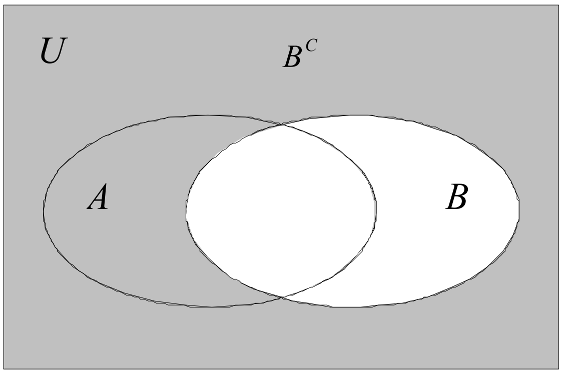
Bevis: Vi studerar vänster och höger led av likheten $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ med Venndiagram. Vi ska alltså göra ett Venndiagram för $(A \cap B)^c$, vi kallar det för D_{VL} och ett Venndiagram för $A^c \cup B^c$, vi kallar det för D_{HL} . Dessa Venndiagram kommer att bli lika och det kommer att visa satsen.

Vi börjar med att konstruera D_{VL} . Komplementet till $A \cap B$ illustreras av följande diagram

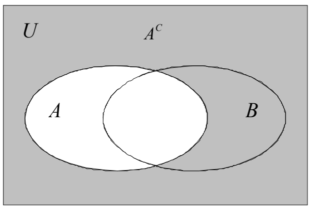


Detta är D_{VL}. Vi bildar nu D_{HL} genom att kombinera Venndiagrammen för A^c och B^c. Vi tar upp Venndiagrammen för A^c och B^c:

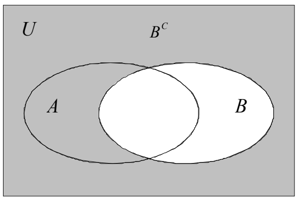




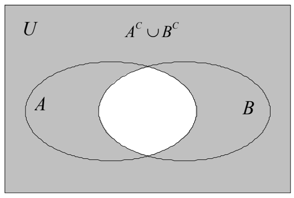
Vi kombinerar nu dessa två Venndiagram i en union och får D_{HL}:



$\cup$



$=$



$= D_{HL}$.

Om vi inspekterar Venndiagrammen för D_{HL} och D_{VL} ser vi att de är identiska vilket visar satsen. Beviset är klart.

Vi kan formulera lagarna som gällde för utsagor för mängder:

LAGAR

För alla mängder *A*, *B* och *C* gäller följande:

1. Kommutativa lagarna: $A \cap B = B \cap A$ samt $A \cup B = B \cup A$.
2. Associativa lagarna: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ samt $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
3. Distributiva lagarna: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ samt $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4. Lagen om dubbla komplementet: $(A^c)^c = A$.
5. Idempotens: $A \cap A = A$ samt $A \cup A = A$.
6. DeMorgans lagar: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ samt $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
7. Absorptionslagarna: $A \cup (A \cap B) = A$ samt $A \cap (A \cup B) = A$.

Vi formulerar även ett par lagar som involverar tomma mängden, $\varnothing$, och universum *U*.

MER LAGAR

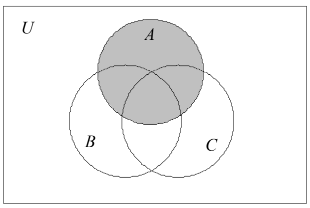
För alla mängder *A* delar i ett universum *U* gäller:

1. Union med tomma mängden: $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$.
2. Snitt och union med komplementet: $A \cap A^c = \varnothing$ och $A \cup A^c = \varnothing$.
3. Snitt med komplementet: $A \cap A^c = A^c \cap A = \varnothing$.
4. Komplement av *U* och $\varnothing$: $U^c = \varnothing$ och $\varnothing^c = U$.

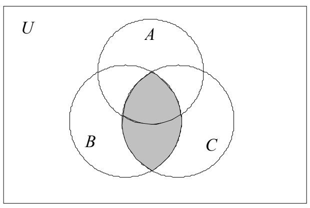
Vi ska visa associativa lagen $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ med ett Venndiagram med tre mängder.

Sats 2.2: För alla mängder *A*, *B*, *C* gäller: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
Bevis: Vi bildar Venndiagrammen för vänster och höger led i likheten $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. Vi kallar Venndiagrammet för $(A \cap B) \cap C$ för D_{VL} och Venndiagrammet för $A \cap (B \cap C)$ för D_{HL}.

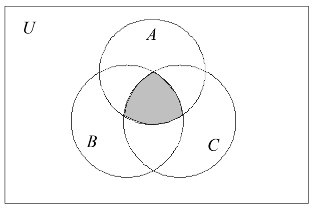
För att bilda D_{HL} kombinerar vi Venndiagrammen för $A \cap B$ och *C* i ett snitt:



$\cap$



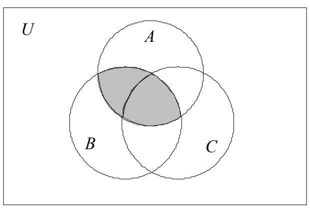
$=$



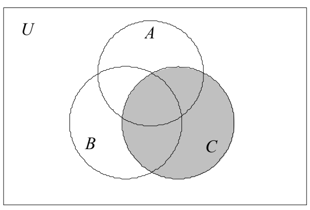
$= D_{HL}$

A $B \cap C$ $A \cap (B \cap C)$

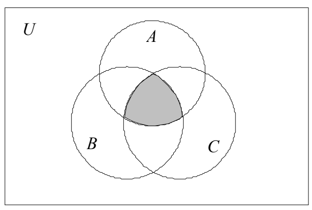
Vi gör motsvarande för D_{VL}:



$\cap$



$=$



$= D_{VL}$

$A \cap B$ C $(A \cap B) \cap C$

Vi observerar att $D_{HL} = D_{VL}$ vilket visar satsen. Beviset är klart.

Anmärkning: Att $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ betyder att vi kan kasta parenteserna och skriva $A \cap B \cap C$. Detta är helt i analogi med vanliga tal, vi kan ju till exempel skriva $2 \cdot 3 \cdot 4$ och uppfatta det som väldefinierat. Union och addition är också associativa det vill säga på samma sätt blir uttrycken $A \cup B \cup C$ och 2 + 3 + 4 väldefinierade.

2.10 Kryssprodukter

Det finns ett speciellt sätt att kombinera mängder på och det är att bilda par eller vektorer av element från mängder. Vi tar en definition.

Definition 2.9: Låt A och B vara två mängder. Med kryssprodukten av A och B menas då mängden av alla *ordnade* par av element från A och B där det första elementet i paren tas från A och det andra tas från B. Vi skriver kryssprodukten med $A \times B$ och vi har således $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

Exempel:

- Låt mängderna A = { 1, 2, 3 } och B = { 3, 4 } vara givna. Då blir $A \times B$ = { (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4) }.
  Observera att paren är ordnade så paret (3, 4) ingår i $A \times B$, men paret (4, 3) ingår *inte*.

- Kryssprodukten mellan alla reella tal och alla reella tal $R \times R = R^2$ bildar mängden av alla par av reella tal som vi känner som mängden av alla punkter som brukar åskådliggöras som det reella talplanet.

Man kan bilda kryssprodukter mellan flera mängder. Vi tar en definition.

Definition 2.10: Låt A, B och C vara givna mängder. Med kryssprodukten mellan A, B och C menas då mängden av alla ordnade tripplar av element från A, B och C där det första elementet väljs från A, det andra från B och det tredje från C. Vi skriver denna kryssprodukt på följande sätt: $A \times B \times C$ och vi har således $A \times B \times C = \{(a,b,c) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$.

Exempel:

- Vi bildar kryssprodukten mellan A = { 0, 1 }, B = { 1, 2 } och C = { 2, 3 }. Vi får då $A \times B \times C$ = {(0, 1, 2), (0, 1, 3), (0, 2, 2), (0, 2, 3), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 2, 3)}.

- Om vi bildar $R \times R \times R$, där R är mängden av reella tal får vi liksom i förra exemplet en mängd som vi känner igen från linjära algebran. $R \times R \times R$ är rummet av punkter i tre dimensioner.

På samma sätt som ovan kan vi införa kryssprodukter av fler mängder än 3. Således blir $A \times B \times C \times D$ lika med mängder av alla ordnade fyrtipplar av element från mängderna A, B, C och D. I fyrtipplarna $A \times B \times C \times D$ i ska det första elementet väljas från A, det andra från B, det tredje från C och det fjärde från D.

2.11 Antal element i en mängd

Vi inför ett skrivsätt för antal element i en mängd.

Definition 2.11: Låt A vara en godtycklig mängd. Med beteckningen $|A|$ menas då antalet element i A. Om A är en mängd med oändligt antal element skriver vi $|A| = \infty$.

Exempel:

- Låt $A = \{ 1, 2, 3, 5 \}$. Eftersom A har 4 element får vi $|A| = 4$.

- För mängden Z = alla heltal gäller $|Z| = \infty$ eftersom Z har oändligt många element. (Det finns ju oändligt många heltal.)

- Antalet element i tomma mängden är 0 och det är den enda mängd som har 0 element. Alltså vet vi att $|A| = 0 \Leftrightarrow A = \varnothing$.

- Låt mängderna $A = \{ 1, 2, 3 \}$ och B = $\{ 3, 4 \}$ vara givna. Då blir $A \times B = \{ (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4) \}$ som vi sett ovan. Vi har att $|A| = 3$, $|B| = 2$ och $|A \times B| = 6$. Vi observerar att $6 = 3 \cdot 2$ och således gäller $|A \times B| = 6 = 3 \cdot 2 = |A| \cdot |B|$. Detta är ingen tillfällighet. För alla kryssprodukter gäller $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

2.12 Predikat och kvantorer

I detta avsnitt ska vi koppla ihop mängdläran och logiken. Vi börjar med att införa variabler i utsagor.

Definition 2.12: Ett <u>predikat</u> är en mening som innehåller variabler som blir utsagor då variablerna tilldelas värden. Med <u>domänen</u> av ett predikat menas mängden av tillåtna värden på de ingående variablerna.

Exempel:

- Meningen $p(x)$ = ”x har fyra ben” är ett predikat som blir olika utsagor beroende på vad vi sätter in på variabeln x’ plats. Vi får olika sanningsvärden beroende på vilka olika värden som x antar. Exempelvis är p(Hästen Brunte) sann medan p(Papegojan Polly) är falsk. Domänen av predikatet $p(x)$ är kanske mängden av alla däggdjur.

- Meningen $q(x)$ = ”$x^2 - 3x + 2 = 0$” är ett predikat som blir olika utsagor beroende på vad vi sätter i på variabeln x’ plats. Exempelvis är $q(0)$ = ”$0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 0$”. Matematiskt vet vi att denna utsaga är falsk ty vänster led i likheten är –1 medan höger led är 0. Vi kan lösa andragradekvationer och vi vet därifrån att $q(1)$ och $q(2)$ är sanna medan $q(x)$ blir falsk för alla andra värden på x. (Däribland värdet 0 som vi just såg.) (Domänen för detta predikat skulle kunna vara de reella talen.)

Ett predikat har alltså inte sanningsvärde på egen hand. Vi måste ange vilka värden variablerna ska anta som bygger upp predikatet för att vi ska kunna tilldela det ett sanningsvärde. Det finns emellertid ett mycket användbart och kraftfullt notationssätt som tillåter oss att formera utsagor av predikat och det är med så kallade *kvantorer*.

Studera andra exemplet ovan. Vi vet att det finns ett värde på x som gör meningen $q(x)$ sann. (Det finns egentligen två värden, men vi nöjer oss med att säga att det finns ett.) För att uttrycka detta ”det finns ett x sådant att $q(x)$ är sann” skriver vi så här: $\exists x : q(x)$. Vi utläser det så här: ”Det existerar ett x sådant att $q(x)$”. Detta har ett sanningsvärde. Vi vet att det finns ett (ja, till och med två!) värden på x som gör $q(x)$ sann. Alltså kan vi säga att det är sant att det existerar ett x sådant att $q(x)$ blir sann. Således är $\exists x : q(x)$ en sann utsaga. Ibland brukar man poängtera vilken domän man arbetar med i samband med notationen med kvantorer och då skriver man så här: $\exists x \in R : q(x)$. Domänen till predikatet $q(x)$ är alla reella tal och utsagan $\exists x \in R : q(x)$ utläser vi nu ”Det finns ett x bland de reella talen sådant att $q(x)$.”

Symbolen ”$\exists$” kallas för *existenskvantorn* och vi ska studera lite exempel med den.

Exempel:

- Utsagan $\exists x \in R : x^2 - 1 = 0$ är sann ty det finns ett reellt tal x sådant att $x^2 - 1 = 0$, till exempel duger $x = 1$. (Vi har ju $1^2 - 1 = 0$.)

- Utsagan $\exists x \in R : x^2 + 1 = 0$ är falsk ty det finns inget reellt tal x sådant att $x^2 + 1 = 0$, för om vi kvadrerar ett reellt, vilket som helst, får vi alltid någonting positivt. Det innebär att uttrycket $x^2 + 1$ alltid är större än 1 och således kan det aldrig bli 0, vilket val av talet x vi än gör bland de reella talen. Vi uppfattar det således som falskt att $\exists x \in R : x^2 + 1 = 0$.

Det finns två kvantorer, den ena är existenskvantorn (som vi redan sett.) Den andra är *allkvantorn*. Vi använder allkvantorn då vi vill uttrycka att någonting gäller för alla x. Vi skriver så här: $\forall x : q(x)$ och utläser det ”För alla x gäller $q(x)$”. Då får vi en utsaga. På samma sätt som med existenskvantorn kan vi betona vilken den underliggande domänen till det aktuella predikatet är genom att skriva $\forall x \in D : q(x)$. Detta utläses ”För alla x i D gäller $q(x)$. ” Vi tar ett par exempel:

Exempel:

- Utsagan $\forall x \in R : x^2 \geq 0$ är sann ty om vi väljer vilket x som helst och kvadrerar det så får vi ett positivt tal.

- Utsagan $\forall x \in R : x^2 - 3x + 2 = 0$ är falsk. Visserligen gäller det, som vi vet, att $2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$ och $1^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$, det vill säga predikatet innanför allkvantorn blir en sann utsaga två värden på x men det betyder alltså inte att predikatet blir en sann utsaga för alla värden på x vilket vi hävdar när vi säger $\forall x \in R : x^2 - 3x + 2 = 0$. Således är utsagan $\forall x \in R : x^2 - 3x + 2 = 0$ falsk.

Kvantorer kan illustreras genom följande anekdot.

En ingenjör (inte utbildad vid KTH-Syd), en fysiker och en matematiker var på resa i Skottland och åkte tåg genom högländerna. På avstånd såg de ett svart får stå och beta gräs varpå ingenjören utbrast: ”Hörni kolla! Ett svart får! Alla fåren i Skottland är tydligen svarta!” Både fysikern och matematikern blev förskräckta över denna förhastade slutsats och fysikern tog till orda. ”Bäste ingenjör! Vi har bara sett *ett* får som är svart i Skottland. Det innebär inte nödvändigtvis att *alla* får i Skottland är svarta. Vad vi med säkerhet kan säga från denna observation är endast att det existerar ett får i Skottland som är svart.” Matematikern tittade förskräckt på fysikern och tog till orda…

Vad matematikern sade ska vi vänta med. Vi ska analysera ingenjörens och fysikerns utlåtanden. Om vi låter D vara mängden av alla får i Skottland och $p(x)$ vara predikatet $p(x)$ = ”x är svart” kan ingenjörens utsaga formuleras: $\forall x \in D : p(x)$. Det vill säga ”För alla får i Skottland gäller att de är svarta.” Detta var givetvis inte säkert, de tre resenärerna hade ju bara observerat ett svart får, som fysikern mycket riktigt anmärkte. Det som fysikern sade låg närmare sanningen. Fysikern sade $\exists x \in D : p(x)$, alltså bland alla fåren i Skottland existerar det ett får som är svart. (Nämligen det som de såg.)

Matematikern (som var en överpetnoga viktigpetter) sade: ”Men är ni helt från vettet båda två! Fåret står ju i profil! Det enda vi kan säga är att det existerar ett får i Skottland vars ena sida är svart.”

Vi ska studera hur vi negerar utsagor formerade med kvantorer. Hur negerar vi utsagan $\forall x \in D : p(x)$? Vi kan återvända till exemplet med får i Skottland för att inse hur vi ska bilda negationen av $\forall x \in D : p(x)$. Antag att det finns 1000 får i Skottland (det finns förstås mycket mer, men låt oss bara anta att det är 1000.) Utsagan $\forall x \in D : p(x)$ kan då skrivas $p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge ... \wedge p(x_{1000})$, det vill säga ” får x_1 är svart och får x_2 är svart och … får x_{1000} är svart.” Alla 1000 fåren är svarta. Vad blir motsatsen? Vad måste gälla om detta ska vara en falsk utsaga? Jo, något av fåren är inte svart. Det räcker med att ett enda får inte är svart för att utsagan ”Alla får är svarta” ska vara en lögn, det vill säga vara falsk. Motsatsen blir alltså att ”Det existerar ett får som inte är svart.” med kvantorer kan vi skriva detta $\exists x \in D :\sim p(x)$. Sammanfattningsvis har vi alltså att negationen av $\forall x \in D : p(x)$ är $\exists x \in D :\sim p(x)$. Vi kan skriva det så här:

$$\sim \forall x \in D : p(x) \Leftrightarrow \exists x \in D :\sim p(x).$$

Vi kan tolka detta som att negationstecknet ”multiplicerats in” förbi allkvantorn som då byts mot en existenskvantor.

På samma sätt bildar vi negationer av utsagor formerade med existenskvantorn. Antag att vi vill bilda utsagan ”Det finns ett svart får i Skottland”. Med kvantorer blir det $\exists x \in D : p(x)$. Om vi nu vill negera detta, det vill säga bilda motsatsen till ”Det finns ett svart får i Skottland” då vill vi att det tolkningen ska vara att det inte finns ett enda får i Skottland som är svart. För alla får i Skottland ska det alltså gälla att de inte är svarta. Negationen av ”Det existerar ett får i Skottland som är svart” blir således ”För alla i Skottland får gäller att de inte är svarta.” Med kvantorer får vi

$$\sim \exists x \in D : p(x) \Leftrightarrow \forall x \in D :\sim p(x).$$

Det vill säga existenskvantorn byts mot allkvantorn då vi ”flyttar in” (eller ”multiplicerar in”) negationstecknet.

Vi har faktiskt sett detta förr. Om vi hävdar att $\forall x \in D : p(x)$ så är detta bara ett kortare skrivsätt för ”$p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge ... \wedge p(x_{1000})$” alltså en vanlig konjunktion av 1000 utsagor. (Om vi nu håller oss till de 1000 fåren i Skottland.) Utsagan $\exists x \in D : p(x)$ kan då tolkas som en disjunktion: $\exists x \in D : p(x) \; = \; p(x_1) \vee p(x_2) \vee ... \vee p(x_{1000})$. Om vi skriver om de två reglerna för negation av utsagor formerade med kvantorer ovan med dessa tolkningar får vi alltså:

$\sim \forall x \in D : p(x) \Leftrightarrow \exists x \in D :\sim p(x)$ skrivs om till
$\sim (p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge ... \wedge p(x_{1000})) \Leftrightarrow \sim p(x_1) \vee \sim p(x_2) \vee ... \vee \sim p(x_{1000})$.

Om vi hade haft bara två får hade det sett ut så här: $\sim (p(x_1) \wedge p(x_2)) \Leftrightarrow \sim p(x_1) \vee \sim p(x_2)$. Men det här är bara DeMorgans Lag! ($\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$) Samma sak gäller för $\sim \exists x \in D : p(x) \Leftrightarrow \forall x \in D :\sim p(x)$.

Exempel: Formulera följande påståenden med hjälp av kvantorer och bilda sedan deras motsatser och uttryck dem med kvantorer. Formulera också motsatsen med vanligt språk.

- ”Alla matematiker bär glasögon”
  Lösning: Sätt D = mängden av alla matematiker. Om $p(x)$ är predikatet ”x bär glasögon” kan ”Alla matematiker bär glasögon” skrivas $\forall x \in D : p(x)$. Negationen blir $\sim \forall x \in D : p(x) \Leftrightarrow \exists x \in D :\sim p(x)$ som utläses ”Det existerar ett x bland alla matematiker som inte bär glasögon” eller kortare ”Det finns en matematiker som inte bär glasögon.”

- ”Alla fåren i Skottland är svarta”
  Lösning: Sätt, som förut, D = mängden av alla får i Skottland. Om $p(x)$ är predikatet ”x är svart” kan ”Alla fåren i Skottland är svarta” skrivas $\forall x \in D : p(x)$. Negationen blir $\sim \forall x \in D : p(x) \Leftrightarrow \exists x \in D :\sim p(x)$ som utläses ”Det existerar ett x bland alla fåren i Skottland som inte är svart” eller kortare ”Det finns ett får i Skottland som inte är svart.”

- ”Alla matematiker är överpetnoga viktigpettrar”
  Lösning: Sätt D = mängden av alla matematiker. Om p(x) är predikatet ”x är en överpetnoga viktigpetter” så kan ”Alla matematiker är överpetnoga viktigpettrar” formuleras $\forall x \in D : p(x)$. Negationen blir $\sim \forall x \in D : p(x) \Leftrightarrow \exists x \in D :\sim p(x)$ som utläses ”Det existerar ett x bland alla matematiker som inte är en överpetnoga viktigpetter”.

- ”Inget får i Skottland är inte svart.”
  Lösning: Sätt, som förut, D = mängden av alla får i Skottland. Om $p(x)$ är predikatet ”x är inte svart”. ”Inget får i Skottland är inte svart” kan också formuleras ”Det existerar inget får i Skottland som är inte är svart. Det kan vi skriva som $\sim \exists x \in D :\sim p(x)$. Att negera denna utsaga är lätt eftersom den inleds med ett negationstecken. Vi får $\sim(\sim \exists x \in D :\sim p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in D :\sim p(x)$ som utläses ”Det finns ett får i Skottland som inte är svart.”

- ”Ett får i Skottland är svart”
  Lösning: Sätt, som förut, D = mängden av alla får i Skottland. Om $p(x)$ är predikatet

”x är svart” kan ”Ett får i Skottland är svart” formuleras $\exists x \in D : p(x)$. Negationen blir $\sim \exists x \in D : p(x) \Leftrightarrow \forall x \in D : \sim p(x)$ vilket kan formuleras ”För alla får i Skottland gäller att de inte är svarta.”

2.13 Booleska algebror

Mängdlära och satslogik har många gemensamma egenskaper. Exempelvis gäller DeMorgans Lagar både för mängder och utsagor. I mängdläran formulerar vi det som att $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ och $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. I satslogik lyder de $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ och $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$. Snittoperationen för mängder ($\cap$) fungerar ungefär som konjunktionen för utsagor ($\wedge$) och unionoperationen för mängder ($\cup$) fungerar ungefär som disjunktionen för utsagor ($\vee$). Detta är ingen slump I själva verket är satslogik och mängdlära exempel på en speciell form av kalkylsystem som förekommer i andra sammangang också. En Boolesk algebra är en mängd av objekt, S, tillsammans med två operationer, + och * sådana att följande regler gäller:

1. För alla a och b i S,

$a + b = b + a$ och $a * b = b * a$ *(Kommutativa lagarna)*

2. För alla a, b och c i S,

(a + b) + c = a + (b + c) och *(Associativa lagarna)*
(a * b) * c = a * (b * c)

3. För alla a, b och c i S,

a + (b * c) = (a + b) * (a + c) *(Distributiva lagarna)*
a * (b + c) = (a * b) + (a * c)

4. Det finns distinkta element 0 och 1 i S sådana att

a + 0 = a *(0 är ett neutralt element för +)*
a * 1 = a *(1 är ett neutralt element för *)*

Detta gäller för alla a i S.

5. För varje a i S existerar det ett element i S som vi betecknar $\bar{a}$. Detta element kallas komplementet till a eller negationen till a. och uppfyller

$a + \bar{a} = 1$ och $a * \bar{a} = 0$ *(Komplementlagarna)*

För mänglära spelar union ($\cup$), snitt ($\cap$) och komplement (^{c}) rollerna av +, * och tagandes av komplement ($\bar{\ }$). Den universella mängden U spelar rollen av 1 och den tomma mängden ($\varnothing$) spelar rollen av 0.

När det gäller utsagor spelar disjunktion ($\vee$), konjunktion ($\wedge$) och negation (~) rollerna av +, * och tagandes av komplement ($\bar{\ }$). Man kan även formera en utsaga som alltid är sann som man kallar t (för tautologi) och en utsaga som alltid är falsk som man kallar c (för contradiction). Utsagorna t och c spelar då rollerna av 1 och 0.