Institutionen för Matematik

SF1625
Envariabelanalys
Läsåret 2015/2016

Modul 6: Integraler och tillämpningar

Denna modul omfattar kapitel 6.3 och 6.5 samt kapitel 7 i kursboken Calculus av Adams och Essex och undervisas på tre föreläsningar, två övningar och ett seminarium.

Viktiga begrepp. Denna modul handlar om **integraler** och deras **tillämpningar**. I kapitel 6.3 fortsätter vi med variabelsubstitutioner och i kapitel 6.5 diskuterar vi **generaliserade integraler**. Av de senare finns två typer: där intervallet är obegränsat och där integranden är obegränsad. I båda fallen löser man problemet genom att ta ett gränsvärde. I kapitel 7 handlar det så om tillämpningar. Det är viktigt att lära sig tekniken med **Riemannsummor**, som används till exempel i härledningen av formeln för båglängd i kapitel 7.3 och i fjäderexemplet som följer nedan.

Exempel. För en viss fjäder gäller att kraften som krävs för att trycka ihop fjädern x meter är $F(x) = x/2$ N. Hur stort arbete krävs för att trycka ihop denna fjäder $1/10$ meter? Om kraften är konstant och i vägens riktning ges arbetet av kraft gånger väg, men denna kraft är inte konstant. Så hur gör man?

Lösning. Dela in intervallet från 0 till $1/10$ i många små delintervall. På ett litet sådant delintervall av längd Δx vid en punkt x är kraften ungefär konstant (om delintervallet är litet så hinner inte kraften ändra sig så mycket under det lilla intervallet eftersom den varierar kontinuerligt). Arbetet för att göra den lilla längdändringen Δx vid punkten x blir därför ungefär $F(x)\Delta x$. Arbetet för att göra hela längdändringen blir summan av arbetena på alla dessa små delintervall, vilket är en Riemannsumma som när delintervallens längd går mot 0 konvergerar mot integralen

$$\int_0^{1/10} F(x)\,dx = \int_0^{1/10} \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{400}\ \text{Nm}$$

som alltså är det arbete som krävs för att längdändra fjädern 0.1 meter.

Det är viktigare att behärska metoden ovan än att komma ihåg olika formler från fysik mm. Det är dock bra att vara säker på rotationsvolym, rotationsarea och båglängd.

Rekommenderade uppgifter ur kursboken Calculus. Kapitel 6.3: 1, 3, 9. Kapitel 6.5: 1, 3, 5, 15, 23, 33, 34, 35. Kapitel 7.1: 1, 3, 5, 13, 19, 21. Kapitel 7.2: 1, 3. Kapitel 7.3: 3, 11, 21. Kapitel 7.4: 1, 3, 5. Kapitel 7.6: 1, 7. Kapitel 7.7: 1, 5.

KAN DU DET HÄR TILLRÄCKLIGT BRA? TESTA DIG SJÄLV!

Uppgift 1. Ange på vilket sätt dessa integraler är generaliserade och beräkna dem.

A. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

B. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

C. $\displaystyle\int_1^\infty xe^{-x}\,dx$

D. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

E. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

Uppgift 2. Avgör om nedanstående generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta.

A. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$

B. $\displaystyle\int_{10}^\infty \frac{x+\ln x}{x^2}\,dx$

C. $\displaystyle\int_0^\infty x\sin x\,dx$

D. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x^2+1+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x^3}\,dx$

E. $\displaystyle\int_{30}^\infty \frac{x\sqrt{x}+x}{1-x^3}\,dx$

F. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$

Uppgift 3. Avgör om det obegränsade område som ligger mellan kurvorna $y = 1$ och $y = \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3}$, när $0 \le x < \infty$, har ändlig area.

Uppgift 4. Härled med hjälp av Riemannsummor formlerna för rotationsvolym runt $x-$ resp y-axeln och beräkna sedan den rotationsvolym som genereras när området mellan kurvan $y = x^3$ och x-axeln på intervallet $0 \le x \le 1$ roteras ett varv runt

A. x-axeln

B. y-axeln

Uppgift 5. Härled följande formler med hjälp av rotationsvolymsteknik.

A. Volymen V av ett klot med radie r ges av $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

B. Volymen V av en kon med basradie r och höjd h ges av $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

Tips för B: snegla vid behov på nästa uppgift.

Uppgift 6. Härled formeln $A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ för mantelytans area A av en kon med basradie r och höjd h genom att betrakta den som den rotationsarea som genereras när $y = rx/h$ på intervallet $0 \leq x \leq h$ roteras runt x-axeln.

Uppgift 7. Beräkna längden av kurvan $y = \ln(1 - x^2), \;\; 0 \leq x \leq 0.5$.

Uppgift 8. En cylindrisk silo med radie 2 meter och höjd 6 meter är fullpackad. Densiteten ρ av innehållet varierar med höjden h enligt formeln

$$\rho(h) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h}{2}}} \quad \text{ton/m}^3.$$

Beräkna massan av innehållet i silon.

Uppgift 9. Ett fordon startar från stillastående och kör 30 minuter rakt framåt med accelerationen $2 + 60t$ km/h^2. Vad är fordonets hastighet efter 30 minuter? Hur långt hinner fordonet?

Uppgift 10. Vid ett test med ett nytt fordon ska man köra en sträcka om 10 km, där olika delar av sträckan ska köras vid olika hastigheter. Anta att hastigheten efter x körda km ska vara $v(x)$ km/h. Hur lång tid tar testet?

Uppgift 11. Vi ska beräkna tyngdpunkten av en homogen halvcirkelskiva. Låt halvcirkelskivan ges av olikheterna

$$x^2 + y^2 \leq R^2, \qquad y \geq 0.$$

Det är klart av symmetriskäl att x-koordinaten för tyngdpunkten måste vara 0. Vad blir y-koordinaten? Tips: kolla vid behov upp formeln för tyngdpunkt i boken.

Uppgift 12. Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{dt}{\sin t}$ med hjälp av substitutionen $x = \tan(t/2)$. Tips: vid denna substitution gäller sambanden

$$\cos t = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \quad \sin t = \frac{2x}{1 + x^2}, \quad dt = \frac{2dx}{1 + x^2}.$$

(Kan du räkna ut denna integral på något annat sätt?)

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

1. A. Obegränsat intervall. $\pi/2$
1. B. Integranden obegränsad när $x \to 1$. $\pi/2$
1. C. Obegränsat intervall. 1
1. D. Integranden obegränsad när $x \to 1$. 2
1. E. Obegränat intervall. 2

2. A. Konvergent
2. B. Divergent
2. C. Divergent
2. D. Divergent
2. E. Konvergent
2. F. Divergent

3. Arean är $\frac{\ln 3}{2}$

4. A. $\pi/7$
4. B. $2\pi/5$

5.

6.

7.

8. 16π ton

9. Sluthastigheten är 8.5 km/h och fordonet hinner1.5 km.

10. $\displaystyle\int_0^{10} \frac{dx}{v(x)}$ timmar

11. $\displaystyle\frac{4R}{3\pi}$

12. $\ln \tan \dfrac{t}{2} + C$, med C godt konstant. Ja.